TEORIA SUBJETIVA DE LA PROBABILIDAD: FUNDAMENTOS, EVOLUCION Y DETERMINACION DE PROBABILIDADES

GREGORIA MATEOS-APARICIO MORALES

DEPARTAMENTO DE ESTADISTICA Y METODOS DE DECISION
FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

TEORIA SUBJETIVA DE LA PROBABILIDAD: FUNDAMENTOS, EVOLUCION Y DETERMINACION DE PROBABILIDADES.

GREGORIA MATEOS-APARICIO MORALES

TESIS DOCTORAL

Dirigida por el doctor D. Manuel LOPEZ CACHERO.

Madrid, 1985

I N D I C E

Página

Página

Página

Página

CAPITULO V

UNA METODOLOGIA PARA EXTRAER PROBABILIDADES SUBJETIVAS DE UN DECISOR.

Página

I N T R O D U C C I O N

Plantearse el comienzo de un trabajo de investigación encaminado a su posterior presentación como tesis doctoral requiere, en principio, justificar las motivaciones -tanto personales, como intelectuales- que nos llevan a elegir un tema determinado y no otros científicamente próximos dentro de la misma área científica de conocimientos. En muchos casos, esta difícil elección viene determinada por exclusión: son muchas las propuestas científicas que, desde diversos consejos, conversaciones o lecturas, se le presentan al doctorando cuando decide culminar sus preocupaciones intelectuales con el inicio de la redacción de su tesis doctoral con objeto de presentarla a la consideración de un tribunal académico. Por diversas causas o razones, estas propuestas van siendo rechazadas hasta que una de ellas concita a la vez los intereses y saberes del interesado. No es éste el caso del trabajo que con esta introducción presentamos, pues desde hace bastantes años trabajamos en la misma línea de investigación que ahora concluye -momentáneamente, al menos- con la presentación de este trabajo en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Durante todos estos años, a través del propio trabajo, surgen las motivaciones que nos llevan a encaminar el tema por los derroteros que nos resultaban más atractivos. Es por ello que nuestra elección no resultó dificil, pues no era más que la continuación de una preocupación vigente desde tiempo atrás. Así, dentro del estudio de la teoría de la probabilidad -estudio al que siempre nos hemos visto abocados debido a nuestra profesión docente en el Departamento de Estadística y Métodos de Decisión, en el que llevamos varios años impartiendo las asignaturas de Estadística- , es quizá el problema de la concepción subjetiva de la probabilidad el que nos ofrecía -y nos ofrece- mayores posibilidades de sugerencia para desarrollar nuestro trabajo de investigación, al margen de la docencia. Y esa atracción tiene sus fundamentos en diversos motivos.

En primer lugar, el atractivo de la concepción subjetiva de la probabilidad radica en que dicha concepción aporta, a la hora de establecer la probabilidad, algo más que las simples reglas inflexibles para la medición de lo exacto, de lo objetivo, de aquellos fenómenos que pueden ser comparados con un experimento de laboratorio, cuando la realidad -tanto en la vida cotidiana, como en el marco de la elaboración de decisiones- en cualquier ámbito, aunque especialmente en el empresarial, nos muestra que raras veces ocurren estas situaciones ideales desde el punto de vista probabilístico. Muchos de los fenómenos que observamos no son experimentables -no son repetibles- y para determinar la medida de la incertidumbre de los sucesos correspondientes a esos fenómenos juegan un papel fundamental la experiencia, la información y la intuición basada en un comportamiento coherente por parte del que tiene que establecer dichas probabilidades. Son precisamente estos factores citados, y en mayor medida la experiencia (no en el sentido de experimentable, sino en el de conocimiento previo de situaciones similares), los que interesan a la teoría subjetiva de la probabilidad.

En segundo lugar, el citado marco de la elaboración de decisiones se mantiene presente, como telón de fondo, en la teoría objeto de este trabajo, pues la determinación de la probabilidad subjetiva constituye un paso anterior a la toma de decisiones. El decisor incorpora la información que tiene sobre la situación e interviene en la asignación de la probabilidad -él sólo o con la ayuda del experto (figura de la que hablaremos en el capítulo IV de este trabajo)- sobre los sucesos considerados. Ello nos lleva a pensar que la aplicación de esta teoría a sucesos reales de la vida cotidiana en los que se plantea el problema de la toma de decisiones es más coherente que la aplicación de las teorías que precedieron en el tiempo a la teoría subjetiva de la probabilidad, como iremos viendo a lo largo del desarrollo de esta tesis.

Por último, la necesidad de estructurar de una forma determinada el estudio de la teoría subjetiva de la probabilidad que, si bien ha sido tratada en numerosos estudios y trabajos de investigación en publicaciones unitarias o artículos científicos en publicaciones de carácter periódico -bastantes de ellos recogidos en una amplia bibliografía al final de esta tesis-, en los que se planteaban aspectos y puntos de vista concretos respecto a este tema, no conocemos una estructuración del tema tal y como nosotros la proponemos. Los autores citados en la bibliografía propuesta, recogen y resuelven algunos problemas enmarcados en el contexto de dicha teoría o bien proponen su versión -desde el punto de vista de partidarios de esta teoría-sobre lo que debía de ser la axiomática que regule el comportamiento coherente exigido a la hora de asignar la probabilidad subjetiva.

Nuestra propuesta de estructuración deberá entonces, si realmente quiere aportar una nueva visión del tema, responder a la necesidad de estudiar la teoría subjetiva de la probabilidad de tal forma que aparezca como colofón lógico del desarrollo general y anterior de la teoría de la probabilidad enlazando, de esta forma, con las teorías anteriores a la propia teoría de la probabilidad subjetiva dentro del marco histórico en el que se desarrollan dichas teorías. Para ello, partimos incluso de los primeros pasos de la teoría de la probabilidad, para considerar su propia evolución que responde, como veremos, a la necesidad de resolver determinados tipos de problemas. Para de esta forma concluir en el estudio de la teoría que nos ocupa desarrollando sus fundamentos y evolución.

Con este objetivo y para seguir un orden lógico que justifique el tratamiento propuesto de este tema, hemos creído conveniente comenzar el trabajo con un capítulo donde se relacionan, entrelazándose, los conceptos de incertidumbre, probabilidad y probabilidad subjetiva, según su desarrollo en el tiempo, que podríamos significar de la forma: incertidumbre-probabilidad-probabilidad subjetiva. Justificando como esta última -la probabilidad subjetiva- es la más adecuada para valorar la incertidumbre de los sucesos que pueden ocurrir en el contexto de la toma de decisiones.

Por ello, hemos considerado conveniente desarrollar la trayectoria de la teoría de la probabilidad que nos lleve al momento en el que aparecen los primeros inicios de la teoría subjetiva.

Esta trayectoria de la teoría de la probabilidad se iniciará en el capítulo II con los antecedentes históricos de esta teoría hasta el momento en el que se crea la primera escuela sobre una concepción del modo de determinar la probabilidad: la concepción clásica (Teoría Clásica de la Probabilidad). A partir de esta concepción, tratamos en el capítulo siguiente esta teoría clásica de la probabilidad y cómo van surgiendo las teorías frecuencial, logicista y subjetiva para resolver inconvenientes de las anteriores, y dar soluciones a los nuevos problemas que se plantean.

En el capítulo IV se recogen las axiomáticas de los que, a nuestro juicio, por el tratamiento dado a nuestro trabajo, son los más notorios representantes o partidarios de esta teoría. Es decir, exponemos los criterios fundamentales aportados por dichos autores a la teoría de la probabilidad subjetiva, desde los primeros inicios -con Bruno De Finetti, en 1931- hasta las aportaciones actuales, especialmente la última recogida de Simon French, en 1982. Evidentemente existen otros autores importantes dentro del contexto de esta teoría, pero nuestro propósito no era tanto ser exhaustivos sino realizar un recorrido significativo a lo largo del tiempo con una selección representativa de los autores más importantes. En este sentido, hemos de advertir que los trabajos de autores no citados quedan también recogidos en la bibliografía final. Bibliografía que pensamos constituye uno de los pilares de esta tesis, puesto que en ella quedan recogidos la mayor parte de los trabajos publicados sobre el asunto que nos ocupa.

Dichas axiomáticas crean el marco que fundamenta la teoría subjetiva de la probabilidad, regulando como hemos señalado anteriormente el comportamiento coherente del individuo que ha de asignar las probabilidades. Algunas de las axiomáticas referidas exponen la axiomatización conjunta de la probabilidad subjetiva y la utilidad, ya que, como se señala en el capítulo I, dichos conceptos se interrelacionan en el proceso de decisión.

También dentro de este capítulo IV, se plantean aquellas situaciones que pueden ocurrir en la práctica a la hora de establecer las valoraciones de la probabilidad. Se tratan, entonces, los problemas de las valoraciones individuales y de grupo, introducciendo la figura del experto o asesor como persona o grupo de personas que, en el marco de la elaboración de decisiones y, por tanto, en el marco de la valoración de las probabilidades de los sucesos implicados en el proceso, interviene técnicamente en dicha valoración.

Por último, después de estos fundamentos teóricos, proponemos en el capítulo V -con el que damos por finalizado el trabajo- una metodología para extraer probabilidades subjetivas de un decisor. Se emplea el término extraer debido a que suponemos que existe un experto en la aplicación de tal metodología, es decir, un técnico que es el que facilita la obtención exacta de las probabilidades una vez que ha recogido la información proporcionada por el decisor, sobre el conocimiento que éste último tiene acerca de la situación a la que se enfrenta (o de la situación que se le presenta) y en la que tiene que hacer una asignación exacta de las probabilidades de los distintos sucesos posibles, para así tomar más correctamente sus decisiones. Obviamente, lo que interesa a esta metodología -y a esta tesis- no es la toma de decisiones, sino -tal y como venimos diciendo- la asignación de probabilidades.

Como aplicación de esta metodología proporcionamos un caso práctico planteado con datos de la Bolsa de Comercio de Madrid. Hemos tomado un conjunto de treinta valores a los que se aplica la metodología referida para calcular las probabilidades de invertir en cada uno de esos valores.

Una vez realizada esta obligada sinopsis introductoria, y para dar por concluida esta presentación debemos señalar aquí algunos aspectos de la confección formal de esta tesis doctoral, que no por su menor importancia deben ser obviados.

En primer lugar es necesario advertir que para la confección de esta tesis doctoral (caja de escritura, paginación, márgenes, etc.) hemos seguido estrictamente las normas dictadas al efecto por la Universidad Complutense para la realización de Tesis Doctorales, recogidas en la Ley de Prensa e Imprenta de 18 de marzo de 1966, por no haber en el momento de redactar esta tesis ninguna norma posterior que anulara aquella.

Por otra parte, como el lector habrá podido comprobar, esta introducción, así como el resto del trabajo, están redactadas en primera persona del plural. La utilización del "nos" o "plural mayestático" tiene, en este caso, dos justificaciones. Una, el profundo respeto intelectual que impone todo tribunal de tesis al doctorando: escondiéndonos tras el plural resultaba más sencillo hacer afirmaciones intelectuales que haciendo presente el "yo" . La segunda, menos personal, es de índole social y está avalada por la opinión de Umberto Eco cuando señala:

> "Algunos creen que es más honrado (utilizar la primera persona) en lugar de utilizar el plural mayestático. No es así. Se dice <u>nosotros</u> por que se supone que aquello que se afirma puede ser compartido por los lectores. Escribir es un acto social" (1).

---

(1) Umberto ECO, <u>Cómo se hace una tesis</u>. Gedisa. Barcelona. 1982, pág. 187.

Todas las citas textuales se presentan traducidas, para facilitar su lectura, aunque hayan sido leídas en el idioma original (como expresan las referencias). A pesar de ello, se escribirán entrecomilladas y con mayor margen que el texto, marcando así las diferencias entre nuestro propio texto y los citados.

Las referencias de cada capítulo se incluyen agrupadas al final de cada uno de ellos, con numeración correlativa a partir del 1 , salvo en esta introducción en la que, por tener una sola, se sitúa a pié de página.

C A P I T U L O I

APROXIMACIONES A LA NOCION DE PROBABILIDAD

CAPITULO I: APROXIMACIONES A LA NOCION DE PROBABILIDAD.

1.1.- La incertidumbre.

1.2.- Incertidumbre, previsión y probabilidad.

1.3.- Vinculación con la toma de decisiones.

"Hablo de azar cuando lo que sabemos no es suficiente para predecir: como ocurre al tirar el dado, situación en que hablamos de azar debido a que no sabemos cuales son las condiciones iniciales (y cabe concebir que un físico equipado con buenos instrumentos pueda predecir una tirada que otras personas no pueden)".

Karl R. Popper. La lógica de la investigación científica. pág. 192.

1.1.- La incertidumbre.

En gran número de situaciones, económicas o de otro género, nos enfrentamos a determinados hechos sin poder predecir con absoluta certeza como ocurrirán. Esta "no certeza" sobre el modo de ocurrir los hechos, sobre los resultados en que se concretará un determinado fenómeno que observamos, es lo que llamamos incertidumbre.

Una vez centrada la noción de incertidumbre nos situamos en un plano mucho más general, para analizar las distintas situaciones en las que puede presentarse.

La incertidumbre puede presentarse en situaciones reales del pasado o del presente, por falta de conocimiento e información, o poca confianza en la información de la que disponemos; podría también proceder, en lo que se refiere a situaciones del pasado, de un fallo de memoria para proporcionar el recuerdo de estas situaciones.

La incertidumbre se presenta también en los actos de previsión. (Ver figura 1).

En este análisis, de forma muy especial, prestamos atención a la presencia de la incertidumbre frente a la toma de decisiones.

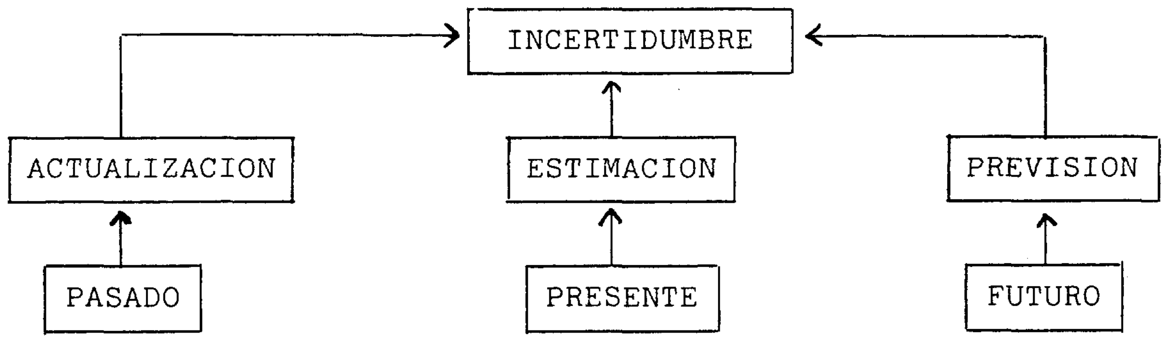


Figura 1

En este caso, podemos pensar que la incertidumbre se debe al hecho de que las decisiones tienen que estar basadas en el conocimiento de la situación real, y que esta situación real sea en ella misma incierta, por lo que para estas decisiones nos guiaremos por la previsión de sucesos incontrolables, lo que produce la incertidumbre en las decisiones.

Sobre este problema de la incertidumbre en la toma de decisiones Manuel López Cachero expone:

> "Supuesto un sujeto (individual o colectivo) que realiza algún tipo de actuación en un ámbito determinado, y admitido que dicho sujeto trata de adoptar algún tipo de decisión (...). La acción a desarrollar a partir de este instante, dependerá de diferentes factores, pero desde su propio origen, se hallará condicionada por el hecho de que las opciones a seguir sean múltiples (...). Partamos, por tanto, de la hipótesis de existencia de más

> una opción. Ello inmediatamente, nos lleva al problema de la incertidumbre, pués en efecto, la pluralidad de opciones ha de suscitar una reacción de duda sobre la que debe ser seguida. Pero, ¿toda incertidumbre es de suyo problemática?, esto es, la simple existencia de múltiples opciones, ¿provocará una posición de incertidumbre en el sujeto?. Pensemos, a partir de este momento, explícitamente en un sujeto que realiza una función económica (...) es obvio que el problema de la incertidumbre existirá estrictamente en la medida en que tal incertidumbre puede resultar 'nociva' o 'perniciosa', es decir, cuando existiendo varias alternativas, la elegida se manifiesta menos adecuada que alguna de las abandonadas" (1).

La incertidumbre también puede deberse a otros factores ya que en los procesos de decisión además de las opciones posibles a seguir influyen la intervención de otros individuos y el contexto del problema.

> "De acuerdo con lo señalado sobre el carácter económico del sujeto, parece lógico resaltar que en la problemática cotidiana de la actividad económica la incertidumbre puede deberse a la acción, conjunta o separada, de al menos uno de dos elementos: el ambiente del problema y las posibles actuaciones de otros sujetos interesados en el mismo orden de cuestiones" (2).

Las decisiones económicas se hacen en condiciones de más o menos incertidumbre. Nosotros no vamos a ocuparnos de los problemas de decisión determinísticos, donde no existe incertidumbre, ya que el tratamiento que pretendemos hacer tiene como punto final la teoría de la decisión estadística. Puesto que como señala G. Hadley:

> "La teoría de la decisión estadística concierne al desarrollo de técnicas de toma de decisiones en situaciones donde la incertidumbre desempeña un papel crucial" (3).

Hay que señalar que la incertidumbre también puede ser parcial, considerando ésta como la referida a aquellas situaciones en que los estados de la naturaleza (estados del ambiente) tienen una distribución de probabilidad parcialmente conocida. Según lo indicado por Sixto Rios:

> "Una de entre varias leyes de probabilidad es la que regula el fenómeno. Se suele considerar cada una de estas como un 'estado del ambiente'. En el caso de ley de probabilidad parcialmente conocida (...) puede mejorarse la información por experimentos planteados adecuadamente con duración fijada o aleatoria, o bien, durante el desarrollo efectivo del proceso (teoría de Wald, procesos secuenciales y adaptivos)" (4).

Los conceptos de incertidumbre y probabilidad aparecen juntos; de la incertidumbre surge la necesidad de estudiar formalmente, y describir determinadas situaciones en las que aparece; y la probabilidad responde a esta necesidad. A veces los dos conceptos no se presentan en este orden, como ocurre en el caso anterior, donde una ley de probabilidad parcialmente conocida produce incertidumbre. Los conceptos se van entrelazando en el análisis de la incertidumbre-probabilidad, y de ciertas situaciones probabilísticas vuelve a surgir la incertidumbre.

1.2.- Incertidumbre, previsión y probabilidad.

Una vez que estamos en una situación con incertidumbre, si queremos distinguir entre el conjunto de alternativas -todas aquellas que con el estado de información que tengamos nos parecen posibles- y las presentamos de la forma que nos parece más efectiva (o en cualquier forma conveniente) empezamos a entrar en el ámbito de la previsión.

La previsión no significa necesariamente adivinar algo. No afirma que algo podría resultar verdadero o falso, pretendiendo transformar la incertidumbre en certidumbre, sino que reconoce que lo que es incierto es incierto.

Cuando nos enfrentamos con la incertidumbre, hacer una previsión consiste en tener una propensión más o menos fuerte a esperar que ciertas alternativas resulten verdaderas antes que otras, o pensar que la respuesta a una cierta cuestión es 'si' antes que 'no' o que la estimación de un valor desconocido variará en un cierto intervalo de valores.

Estas actitudes no nos llevan a afirmar como cierto o imposible algo. Las cosas inciertas son inciertas, pero nosotros atribuimos a distintos sucesos inciertos un mayor o menor grado de un factor personal y subjetivo que expresa esta postura (estas actitudes). Esto es lo que llamamos probabilidades siguiendo las ideas de Bruno de Finetti, Savage y otros destacados autores de esta teoría.

Se utiliza este enfoque personalista, aunque con ello nos adelantemos a la exposición del criterio subjetivista o personalista, como veremos posteriormente, puesto que con estas ideas iniciales se pretende trazar una línea que nos lleve a la necesidad de establecer la probabilidad subjetiva, como un paso anterior a la toma de decisiones.

De acuerdo con Sixto Rios en su Análisis de Decisiones pensamos que:

> "Se supone que se manejan probabilidades objetivas al hacer abstracción experimental de situaciones como lanzar una moneda, un dado, hacer girar la ruleta, extraer una bola de una urna, etc. Pero en las situaciones reales es frecuente que no se pueda asignar a los sucesos que puedan presentarse probabilidades objetivas en forma análoga a los anteriores. No tiene sentido por ejemplo, hablar de las probabilidades objetivas de sucesos como 'el caballo Lindo ganará tal carrera', o 'el Real Madrid ganará el partido del domingo próximo', o 'la venta del nuevo producto que se va a fabricar superará los diez millones de pesetas', etc...
>
> Nos ocuparemos por tanto de extender los criterios de decisión a situaciones de incertidumbre, introduciendo de paso el concepto de probabilidad subjetiva apropiado a las mismas" (5).

Y, siguiendo con esta línea de trazar las directrices del tema por las que se ha llegado a plantear el estudio de la probabilidad subjetiva, tomamos una cita de G. Hadley con sentido similar a la anterior.

> "Al tomar una decisión, a veces se encuentran problemas que nunca antes han surgido, ni ocurrirán de nuevo en la misma forma. En tales situaciones también es cierto que al tomar una decisión no se pueden determinar todas las implicaciones de las acciones, y conviene imaginar que el azar jugará un papel importante en la determinación del resultado de la acción seleccionada. En situaciones de este tipo se supondrá que al usar el concepto de probabilidad será posible expresar en términos cuantitativos la manera como la incertidumbre interviene en la situación. De hecho, el uso de la palabra probabilidad en el lenguaje cotidiano se refiere en general a tales situaciones. (...) Estas situaciones tienen la característica de no poder ser interpretadas en términos de frecuencias; no pueden ser repetidas ni se repetirán (...) Al usar la probabilidad en esta manera, se dice que esta expresa el <u>grado de credibilidad racional.</u> Tales probabilidades son consideradas como <u>personales o subjetivas</u>" (6).

Siguiendo con la noción de previsión, en lo que ésta comporta como expresión de una conjetura, podemos decir que consiste en formular las alternativas posibles para asignarles nuestras propias expectativas de probabilidad.

En este campo de la previsión entramos cuando estamos en una situación de incertidumbre, a veces sin una necesidad concreta, sino sólo por el hecho de que, de forma espontánea, formulamos las alternativas que creemos que pueden ocurrir, y nos preocupa el que ocurran las situaciones desfavorables.

También puede surgirnos una necesidad más concreta debido a unos objetivos planteados y, ante el riesgo que ellos comportan, tengamos que valorar los 'pros' y los 'contra' y expresar nuestra previsión.

En este proceso cumple un papel fundamental la coherencia del individuo.

Estas condiciones de coherencia a la hora de establecer probabilidades, deben expresar la forma en que uno debe razonar acerca de ellas, sobre como evaluarlas; por tanto como debe ser el comportamiento en la elaboración de decisiones bajo incertidumbre. (Figura 2)

$$\boxed{\text{INCERTIDUMBRE}} \longrightarrow \boxed{\text{PROBABILIDAD}} \longrightarrow \boxed{\text{TOMA DE DECISIONES}}$$

Figura 2

Esto nos llevará a establecer criterios para medir posibilidades es decir, para establecer o calcular probabilidades.

Lo que debemos hacer al establecer nuestras valoraciones estará, por tanto, en función de evitar en las consecuencias de las decisiones efectos no deseables, efectos que produzcan una cierta pérdida.

Las condiciones de coherencia, de hecho, no producen restricciones en las probabilidades que se pueden asignar, excepto que no deben estar en contradicción con ellas mismas.

Según Manuel López Cachero que cita a Bruno De Finetti:

> "El grado de probabilidad atribuido por un individuo a un suceso, se manifiesta por las condiciones en las que él estaría dispuesto a apostar por este suceso, estableciendo como principio básico para la cuantificación de la probabilidad (y para su establecimiento) el que se verifique el principio de 'coherencia' (conjunto de reglas a las que la evaluación subjetiva de las probabilidades de diversos acontecimientos por un mismo individuo debe someterse, si no quiere que entre ellas se produzca una contradicción fundamental)" (7).

De acuerdo con De Finetti, fijaremos las condiciones fundamentales para obtener la probabilidad como medida, teniendo en cuenta en primer lugar que esta sea operativa, que pueda establecerse para cualquier suceso, y que si lleva alguna incoherencia, el individuo debe revisar sus valoraciones para modificarlas hasta que esa valoración sea coherente. La coherencia debe excluir la posibilidad de ciertas consecuencias inaceptables para todos.

Sobre este punto de la coherencia y la racionalidad del sujeto Ward Edwards plantea, en su obra Toma de Decisiones, lo siguiente:

> "El hecho fundamental acerca del hombre económico es su racionalidad. Esto significa dos cosas: puede ordenar debilmente los estados en que puede colocarse, y toma sus decisiones para maximizar algo" (8).

1.3.- Vinculación con la toma de decisiones.

La toma de decisiones se efectua considerando, en primer lugar, los incrementos de utilidad individuales asignados a las consecuencias de varias decisiones posibles y ponderándolas con las respectivas probabilidades. Esto está de acuerdo con lo expuesto por G. Hadley al hablar de la teoría de la decisión estadística:

> "La teoría de la decisión estadística se vale de modelos matemáticos como instrumentos básicos para la solución de problemas de decisión bajo incertidumbre. Se apoya en grado considerable en la teoría de la probabilidad y, además, acude en buena medida a la moderna teoría de la utilidad. Antes de estudiar la teoría de la decisión hay que desarrollar primero los fundamentos de la teoría de la probabilidad y discutir la teoría de la utilidad" (9).

Dejamos constancia una vez más de la importancia de la probabilidad en la toma de decisiones, y además hace aquí su aparición un nuevo elemento: la medida de la utilidad, elemento que hasta ahora no habíamos referido y que también tiene un papel importante en este estudio (bajo el punto de vista del análisis que vamos a hacer).

Recordemos que uno de los objetivos de este trabajo, está referido al modo de asignar probabilidades subjetivas y la función que desempeñan en la toma de decisiones y, en este proceso, la teoría de la utilidad tiene una aplicación importante, como ya veremos. Nos serviremos de la utilidad para la asignación de probabilidades subjetivas. Son dos elementos de un mismo proceso, ambas valoraciones nos sirven para fundamentar la toma de decisiones. (Figura 3).

Para la toma de decisiones tenemos que establecer probabilidades, y la probabilidad subjetiva parece la más adecuada a este proceso.

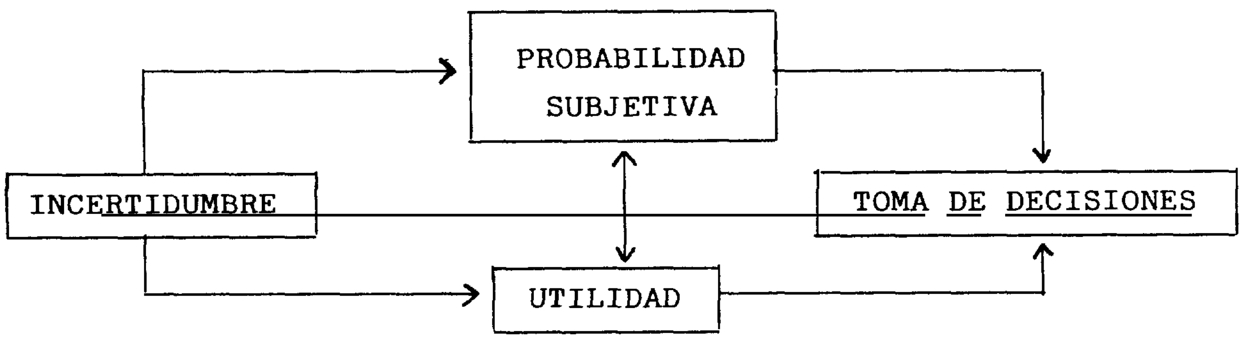


Figura 3

A esta función que desempeña la probabilidad subjetiva para la toma de decisiones se refiere Manuel López Cachero cuando dice:

"La elaboración de un sistema de probabilidades requiere, obviamente, una inicial toma de postura sobre el tipo de probabilidad a considerar (...) resultará lógico que dediquemos alguna atención a las cuestiones que suscita la probabilidad subjetiva, por cuanto, cara a la adopción de decisiones, parece más verosimil este planteamiento que cualquier otro. En efecto, la aproximación al conocimiento del conjunto de los estados de la naturaleza, pone de manifiesto las notables dificultades de conocer expresamente una distribución de probabilidad objetiva referida a tales estados; de ello se sigue el interés y lo atractivo de la concepción subjetiva" (10).

Las aproximaciones objetivistas, sin embargo, se inclinan por dar respuestas no probabilísticas, sino expresarlas en términos de aceptar o rechazar una hipótesis dada, aunque esto no signifique aceptarla como si fuera totalmente cierta, al menos que realmente se considerase verdadera, es decir, actuar como en la lógica ordinaria.

A esto responden los subjetivistas, cuando plantean que el comportamiento adecuado está en maximizar la utilidad esperada.

El comportamiento en el campo científico no puede escapar de tener que ponderar las consecuencias favorables y desfavorables, de verificar de algún modo las opiniones coherentes. Esta verificación puede mostrarse pasando de las probabilidades a 'priori' y las probabilidades a 'posteriori' de acuerdo con el teorema de Bayes. Por tanto la formulación bayesiana puede eliminar los defecftos del esquema objetivista.

En este aspecto han contribuido de forma esencial Leonard J. Savage, Irving John Good y Dennis V. Lindley.

NOTAS AL CAPITULO I

(1) Manuel LOPEZ CAHERO, Teoría de la Decisión. Ed. I.C.E. Madrid 1983, pag. 19.

(2) LOPEZ CACHERO, opc. cit., pág. 20.

(3) G. HADLEY, Probabilidad y Estadística: una introducción a la teoría de la decisión. Fondo de Cultura Económica, Mexico 1979, pág. 12.

(4) Sixto RIOS, Análisis de Decisiones, 1ª parte, Madrid 1973. pág. 8.

(5) S. RIOS, Op. cit., pág. 95.

(6) G. HADLEY, op. cit., pp. 21-22.

(7) M. LOPEZ CACHERO, "El problema de la regulación y la adopción de decisiones: El papel de la probabilidad y de la información". Separata de Anales del C.U.N.E.F. 1980-81, pág. 202.

(8) Ward EDWARDS y Amos TVERSKY, Toma de Decisiones, Fondo de Cultura Económica, México 1979, pág. 17.

(9) G. HADLEY, op. cit., pág. 13.

(10) M. LOPEZ CACHERO, op. cit., Madrid 1980-81, pág. 202.

C A P I T U L O II

HISTORIA DE LA TEORIA DE LA PROBABILIDAD DESDE SUS ORIGENES A LAPLACE.

CAPITULO II: HISTORIA DE LA TEORIA DE LA PROBABILIDAD DESDE SUS ORIGENES A LAPLACE.

2.1.- La teoría del azar en sus comienzos.

2.2.- Los inicios de la teoría de la probabilidad.

- 2.2.1.- Gerolano Cardan (1501-1576)
- 2.2.2.- Johann Kepler (1571-1630)
- 2.2.3.- Galileo Galilei (1563-1642)

2.3.- Los primeros fundamentos.

- 2.3.1.- Blas Pascal (1623-1662) y Pierre Fermat (1601-1665).
- 2.3.2.- Christiaan Huygens (1629-1695).
- 2.3.3.- Gottfried Wilhelm Leibniz (1647-1716).

2.4.- De los problemas particulares a las formulaciones generales.

- 2.4.1.- James Bernoulli (1654-1705).
- 2.4.2.- Pierre Remond de Montmort (1678-1719).
- 2.4.3.- Abraham De Moivre (1667-1754).
- 2.4.4.- Rev. Thomas Bayes (1702-1761).

2.5.- Pierre Simon Laplace (1749-1827): Formalización de la teoría clásica de la probabilidad.

"Probability is a science of inference about real things".

John Venn. The Logic of Chance, pág. 120

2.1.- La teoría del azar en sus comienzos.

El cálculo de probabilidades surge para resolver problemas de juegos de azar, para estudiar formalmente los sucesos aleatorios, caracterizados porque ante ellos no podemos hacer predicciones sin riesgo a equivocarnos, ya que con ellos se produce de manera inmediata la incertidumbre.

En un primer momento de la historia de la teoría del azar se plantean las situaciones empíricas del juego de azar con las tabas utilizadas en Grecia, Egipto y Roma -parece que de estas tabas procede el actual dado-. En estos juegos el jugador desea hacer un análisis acerca de la posible ocurrencia o no ocurrencia del suceso que le interesa, con el objeto de valorar de antemano sus posibles pérdidas o ganancias. Durante cientos de años este problema quedaba sin resolver ya que para estos jugadores de azar, lo aleatorio del juego llevaba parejo la incalculabilidad, creencia a la que llegaban después de gran número de intentos sin éxito sobre el cálculo de sus predicciones; todos los métodos de predicción fallaban cuando se presentaba la aleatoriedad. En este sentido comenta Karl R. Popper:

> "Para deducir predicciones se necesitan leyes y condiciones iniciales: si no se dispone de leyes apropiadas o si no cabe averiguar cuales son las condiciones iniciales, el modo científico de predecir se desmorona. Al tirar el dado, lo que nos falta, sin duda alguna, es un conocimiento sufi-

> ciente de las condiciones iniciales; si dispusieramos de mediciones suficientemente precisas de estas también sería posible hacer predicciones en este caso; pero las reglas para tirar el dado correctamente (agitar el cubilete) están elegidas de tal modo que nos impiden medir las condiciones iniciales. Llamaré marco de condiciones las reglas del juego y todas aquellas otras que determinen las condiciones en que han de ocurrir los diversos eventos de una sucesión azarosa: consisten en requisitos tales como el dado tiene que ser correcto (hecho de un material homogéneo), que se ha de mover bien, ... etc." (1)

Con estas condiciones -dado correcto, moverlo bien, etc.- podemos mejorar nuestras predicciones respecto a otra situación en que estas condiciones no se cumplan y no tengamos información sobre ello, pero en cualquier caso existe la necesidad del cálculo de probabilidades para aplicar a los fenómenos de este tipo.

A pesar de la gran afición al juego de los dados entre egipcios, griegos y romanos, estos no advirtieron que en un gran número de jugadas se tendía a obtener el mismo número de veces una cara que las restantes del dado. La razón por la que no se plantean este problema de equiprobabilidad es debida según Ubaldo Nieto de Alba, que cita a F.N. David, a dos razones: la imperfección del dado y las creencias religiosas. Sin embargo, según este mismo autor, la primera explicación no es compartida por algunos estudiosos de la materia, entre ellos M.G. Kendall, quién afirma que muchos dados están bien construidos. Este último autor considera las cuatro razones siguientes como causa para no advertir la equiprobabilidad:

> " a) Ausencia de una teoría combinatoria.
> b) Superstición en los jugadores.
> c) Ausencia de una notación adecuada de los sucesos de azar.
> d) Trabas morales y religiosas para el desarrollo de la idea de aleatoriedad.
>
> (...) Antes del cristianismo los griegos y romanos parece que consideraban el mundo parcialmente determinado por el azar (...). Un procedimiento mediante el cual las deleidades como La Fortuna, Los Hados o el Destino podían expresar sus deseos era interviniendo en el lanzamiento del dado (...). Precisamente, en Grecia y Roma las cuatro tabas de jugadores se usaban también en los templos de los dioses" (2).

Con el cristianismo estos planteamientos cambian bastante, ya que según San Agustín la mano de Dios estaba en todas partes y nada acaecía sin causa: nada era aleatorio, por tanto no había azar. Más adelante Santo Tomás de Aquino considera que el azar y la suerte existen.

Todo este tipo de cambios pueden llevarnos a lo que se cree que fue el motivo, o bien influyó en gran parte, de que se retrasara el desarrollo del cálculo de probabilidades.

2.2.- Los inicios de la teoría de la probabilidad.

2.2.1.- Gerolano Cardan (1501-1576).

En el siglo XVI tenemos los primeros inicios de la teoría de la probabilidad con Geroalno Cardan (o Cardano), matemático, médico y físico italiano que trabajó en el cálculo de probabilidades.

Cardan fué un apasionado del juego, esta pasión que le dominó toda la vida, fué la causa por la que se dedicó al estudio de los juegos de dados.

Escribió un tratado titulado De Ludo Aleae (Sobre los juegos de azar), publicado en 1663 en Lyon después de su muerte, en el que resuelve varios problemas de análisis combinatorio. El tratado de Cardan puede ser el mejor manual escrito, para un jugador de la época. Contiene diversos asuntos relacionados con el juego, como descripciones de juegos y precauciones necesarias para emplear contra el adversario. En uno de los capítulos de su libro muestra el número de casos favorables de cada tirada que puede hacerse con dos dados, por ejemplo dos y doce sólo pueden obtenerse de una forma. Diez puede obtenerse de tres formas: cinco en cada dado, seis en uno y cuatro en otro, o bien a la inversa, etc... Cardan también muestra el número de casos favorables para cada tirada que puede obtenerse con tres dados.

Henry Morley comenta en su obra Life of Cardan que este autor afirma descaradamente, como uno de sus primeros axiomas, que el dado y las cartas deben jugarse por dinero. Posteriormente veremos como el planteamiento de estos problemas particulares de los jugadores va evolucionando y formalizandose poco a poco.

2.2.2.- Johann Kepler (1571-1630).

Kepler, astrónomo alemán, estudió en Tubinga y allí se formó en las ideas de Copérnico. Fué profesor de Matemáticas y Astronomía en la Universidad de Graz (1594), Matemático en Linz (1612), y creador de la mecánica celeste.

En su trabajo De Stella Nova in pede Serpentarii, publicada en 1606, hace algunos comentarios sobre el tema del azar. Kepler analiza las distintas opiniones sobre las causas de aparición de una estrella que brilló con gran esplendor en 1604, y entre estas opiniones está la de que la estrella se ha producido por la concurrencia fortuita de átomos. Kepler afirma también en su obra, además del comentario anterior sobre la intervención del azar en la formación de la estrella, que incluso los sucesos como las tiradas de un dado no suceden sin una causa.

Como podemos ver la aportación de Kepler a la teoría de la probabilidad es poco relevante, el hecho de mencionarlo se debe al interés por dejar constancia de los pequeños indicios que hay en el siglo XVI sobre esta teoría. Por estas razones sólo se hace esta brevisima referencia a él.

2.2.3.- Galileo Galilei (1563-1642).

Galileo Galilei, matemático, físico y astrónomo italiano, escribió una obra titulada Considerazione sopra il Giuco dei Dadi, cuya fecha de publicación no es posible determinar puesto que no hay datos para ello. Parece que el tema sobre la probabilidad le surgió a Galileo porque un amigo le consultó el problema siguiente: los resultados 9 y 10 se pueden obtener con tres dados mediante seis combinaciones diferentes, pero la experiencia demuestra que el resultado 10 se obtiene mayor número de veces que el 9.

Galileo hizo un análisis preciso de todos los casos que podían ocurrir y comprobó que de los 216 casos posibles, 27 eran favorables a que resultase el 10, y 25 eran favorables a que resultase el 9.

Veamos como contaban uno y otro estas combinaciones.

El amigo que consulta a Galileo no tiene en cuenta el orden y enumera así los casos favorables al 9: 1 2 6 , 1 3 5, 1 4 4, 2 2 5, 2 3 4, 3 3 3; y del siguiente modo los casos favorables al 10: 1 3 6, 1 4 5, 2 2 6, 2 3 5, 2 4 4, 3 4 3. De esta manera obtenía el mismo número de casos favorables a 9 y a 10, en ambos casos seis.

Galileo calculaba así los distintos casos posibles y favorables: Nº de casos posibles: $VR_{6,3} = 6^3 = 216$.

Casos favorables a que ocurra el resultado 9: El 1 2 6 y en cualquier otro orden, son $P_3 = 3! = 6$ casos favorables. El ~~1 3 5~~ y en cualquier otro orden son $P_3 = 6$ casos favorables. El 1 4 4 y en cualquier otro orden son $P_3^{2,1} = 3$ casos favorables. El 2 2 5 y en cualquier otro orden, son $P_3^{2,1} = 6$ casos favorables. El 2 3 4 y en cualquier otro orden, son $P_3 = 6$ casos favorables y por último la combinación 3 3 3. En total son $6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 25$ casos favorables al 9.

De la misma forma se calcularían los casos favorables al 10, cambiando el orden de cada combinación distinta. Así se obtienen 27 casos favorables al 10, lo que muestra que el resultado 10 se obtiene mayor número de veces que el 9. Realmente, el amigo de Galileo no había calculado todas las posibilidades.

Las referencias del siglo XVI que se acaban de hacer son de poca importancia, sin embargo debido a los contactos que en ese momento se dan entre Francia e Italia en el aspecto intelectual, muchos de los trabajos italianos pasaron a Francia, entre ellos algunos sobre el cálculo de probabilidades llegaron a manos de Blas Pascal y Pierre Fermat, que son considerados por muchos autores como los verdaderos iniciadores de la teoría de la probabilidad. Pascal y Fermat se proponen resolver algunos problemas sobre probabilidades y de esta forma con ellos entramos en el siglo XVII. De estos dos autores se hablará en el próximo epígrafe.

2.3.- Los primeros fundamentos.

2.3.1.- Blas Pascal (1623-1662) y Pierre Fermat (1601-1665)

Blas Pascal, filósofo, teólogo, matemático y escritor francés y Pierre Fermat, matemático también francés, se estudian conjuntamente en la teoría de la probabilidad debido a que inician sus investigaciones con el mismo motivo y existe una intensa correspondencia entre ellos.

Al parecer, el caballero De Méré, persona muy aficionada al juego, propuso un problema a Pascal y éste, a su vez, se lo comunicó a Fermat dando lugar al inicio de sus investigaciones paralelas. En palabras de Poisson, en su obra Recherches sur la Probabilité, un problema relativo a un juego de azar propuesto a un austero jansenista por un hombre de mundo, ha sido el origen del cálculo de probabilidades.

Por esta razón, el Caballero De Méré está indisolublemente asociado con los nombres de Pascal y Fermat en la historia de la teoría de la probabilidad.

Existen tres cartas de Pascal a Fermat sobre este tema, escritas en 1654 y publicadas en Varia Opera Mathematica por Pierre Fermat en Tolosae, 1679, en las páginas 179-188.

También los trabajos publicados por Pascal contienen algunas cartas escritas por Fermat a Pascal y que no están en los trabajos de Fermat, dos de estas cartas referentes al tema de probabilidades.

El problema propuesto por el Caballero De Méré llamado, en inglés, The Problem of Points, es discutido en la correspondencia entre ambos autores, comenzando así la teoría de la probabilidad.

El Problema de los Puntos consiste en lo siguiente: dos jugadores necesitan conseguir, cada uno, un número dado de puntos para ganar; si abandonan el juego sin acabar de jugar, ¿cómo dividirían el premio entre ellos?. La pregunta hecha de otra forma podría ser: ¿Cuál es la probabilidad que cada jugador tiene de ganar en cada etapa del juego?.

Una de las conclusiones de Pascal y Fermat es que los jugadores tienen iguales posibilidades de ganar un punto (un tanto) cualquiera es decir les supone igual habilidad, y sobre este acuerdo Pascal enuncia dos resultados generales sin demostración que, actualizando la notación serían:

I.- Supongamos que cada jugador ha apostado una cantidad de dinero representada por "A", que el número de tantos es "n+1", y supongamos que el primer jugador ha ganado "n" tantos y el segundo jugador ninguno. Si los dos jugadores están de acuerdo en no seguir jugando, el primer jugador tiene derecho a la cantidad $2A - \frac{A}{2^n}$.

II.- Supongamos que las apuestas y el número de puntos del juego son como antes, y que el primer jugador ha ganado un punto y el segundo jugador ninguno. Si los jugadores están de acuerdo en no continuar el juego, al primer jugador le corresponde la cantidad

$$A + A \frac{1.3.5. \ldots (2n-1)}{2.4.6. \ldots (2n)}$$

En el intercambio de correspondencia entre Pascal y Fermat, concretamente en la segunda carta del veinticuatro de agosto de 1654, Pascal afirma que el método de Fermat es correcto sólo si hay dos jugadores pero no lo es si hay más de dos; sin embargo, en este punto Pascal estaba equivocado. Veámos por qué.

En una carta de Pascal a Fermat del veintinueve de agosto de 1654 se refiere al problema de los puntos para tres jugadores. El veinticuatro de septiembre, Fermat responde a Pascal y en esta respuesta señala el error de este último respecto a ese problema.

Pascal había supuesto que, si los jugadores son A, B y C la combinación ACC, que indica el orden en que ganan los jugadores, era igualmente favorable a "A" y a "C"; pero Fermat dice que este caso es sólo favorable a "A", ya que "A" gana un tanto antes de que "C" lo gane, y como "A" sólo necesitaba un tanto, con esto el juego queda decidido a su favor.

Con este comentario tratamos de indicar de forma resumida dónde estaba el error de Pascal sin intención de ahondar más en el tema, puesto que sólo pretendemos dar las referencias más importantes de la historia de la teoría de la probabilidad.

Como ya se ha señalado, se puede decir realmente que la teoría de la probabilidad comenzó con Blas Pascal y Pierre Fermat.

La fama de Pascal, sin embargo, reside en un campo más amplio que la de Fermat, pero la de éste último también es importante en la teoría de la ciencia. Hay que recordar que en la época de Luis Felipe, el gobierno francés asignó gran cantidad de dinero para publicar una nueva edición de la obra de Fermat, aunque esta no llegó a realizarse. Posteriormente se reimprimió en Berlín, en el año 1861.

Mientras la teoría de la probabilidad comenzaba, como ya se ha insistido repetidas veces junto con Pascal y Fermat, vivían en Europa importantes matemáticos: entre ellos Descartes, que murió en 1650; Newton y Leibnitz, que aún eran desconocidos, ya que el primero nació en 1642 y el segundo en 1646; Christiaan Huygens que merece una atención especial por su aportación al cálculo de probabilidades.

Huygens nació en 1629, y en la época de Pascal y Fermat ya había dado muestra de su influencia pero aún no estaba a su altura.

Podría parecer que un tema de interés, como el de Pascal y Fermat, era lógico que hubiera llamado la atención de los más distinguidos matemáticos de la época, pero esto no ocurrió y gran parte de sus investigaciones fueron indiferentes, con lo cual cada uno de ellos tuvo que conformarse con la aprobación y aportación del otro.

Pascal murió en 1662, a los 39 años, y Fermat en 1665, una vez comenzada la segunda mitad del siglo XVII, en la que lo que más llamó la atención fué la invención del Cálculo Diferencial por Leibnitz y Newton, en cambio la teoría de la probabilidad avanzó muy poco en esta parte de siglo.

2.3.2.- La aportación de Christian Huygens (1629-1695).

Ya hemos hecho referencia en el apartado anterior a Huygens, como matemático importante de la época y por su aportación a la teoría de la probabilidad.

Christian Huygens nació en La Haya, el 14 de abril de 1629, y murió también en La Haya el 8 de junio de 1695. Este astrónomo y matemático holandés de buena familia estuvo en contacto en Paris con matemáticos franceses y mantuvo después correspondencia con Fermat. Se cuenta con una biografía suya en su obra Opera Varia, publicada en Leyden, en 1724.

Ubaldo Nieto de Alba comenta de él:

> "Si damos por conocidos los orígenes y nos fijamos en el desarrollo de la teoría, ésta recibió el mayor impulso en los años 1650-60 con la publicación de De Ratiociniis in Aleae Ludo de Christian Huygens" (3).

De acuerdo con U. Nieto el tratado De Ratiociniis in Aleae Ludo, en castellano Sobre el razonamiento de los juegos de azar, fué la más importante aportación a la teoría de la probabilidad en la segunda mitad del siglo XVII.

Este tratado fué publicado primero por Schooten al final de su trabajo titulado Exercitationum Mathematicarum libri quinque publicado en Leyden, en 1657, y ocupa las páginas 519 a 534 del volumen.

Schooten había sido maestro de Huygens en matemáticas, y el tratado se lo comunicó Huygens a Schooten en su lengua; siendo Schooten quien posteriormente lo tradujo al latin.

Es conveniente no olvidar que el latín era la lengua más usual en las comunicaciones científicas de la época, como podemos observar por las obras citadas hasta ahora y por las que citaremos en adelante.

Este tratado vuelve a publicarse con un comentario en Ars Conjectandi de James Bernoulli, obra que tendremos que citar en muchas ocasiones, y en la que el trabajo de Huygens conforma la primera de las 4 partes de las que se compone el de Bernoulli.

Sobre esta obra comenta también Ubaldo Nieto:

> "En este tratado, Huygens trata el problema de una forma sistemática y añade algunos resultados, los cuales pudieron ser llevados a cabo por si mismo ya que reconoce, en el resto de su obra, los trabajos de los matemáticos franceses. No obstante, mientras aquellos reservaron sus métodos, él los da a la luz comenzando por los elementos y considerando que no parte de los mismos principios" (4).

Este trabajo contiene catorce proposiciones; la primera de las cuales afirma que si un jugador tiene iguales posibilidades de ganar una cantidad representada por "A" que otra representada por "B", su expectativa de ganar es $\frac{1}{2}$ (A + B).

La segunda proposición afirma que si un jugador tiene igual probabilidad de ganar A o B o C, su expectativa de ganar es $\frac{1}{3}(A + B + C)$.

La tercera proposición afirma que si un jugador tiene probabilidad "p" de ganar A y probabilidad "q" de ganar B, su expectativa de ganar $\frac{p.A + q.B}{p + q}$.

En la cuarta, quinta, sexta y séptima proposiciones vuelve a discutir Problema de los Puntos, referido anteriormente, con dos jugadores, con un método similar al de Pascal. La octava y novena proposiciones discuten el Problema de los Puntos cuando hay tres jugadores con un método similar al utilizado para el caso de dos jugadores. En la décima proposición investiga como puede obtenerse un seis con un solo dado con muchas tiradas. En la proposición número once investiga como puede obtenerse un doce con un par de dados. En la número doce investiga con cuantos dados debe tirar un jugador para conseguir en una tirada al menos dos seis. La proposición número trece trata el siguiente problema: "A" y "B" juegan con dos dados, si con los dos se obtiene un siete gana "A", si se obtiene un diez gana "B" y se obtiene cualquier otro resultado el premio se divide. Comparar las probabilidades de "A" y "B". Por último la proposición número catorce consiste en lo siguiente: dos jugadores "A" y "B" juegan con dos dados con la condición de que "A" gana la apuesta si obtiene un seis antes de que "B" obtenga un siete, y que "B" gana la apuesta si obtiene un siete antes de que A obtenga un seis. Si A comienza el juego y tiran alternativamente propone comparar las probabilidades de A y B.

Hemos dado únicamente los enunciados de estas proposiciones, sin resolverlas, con el objeto de señalar las investigaciones sobre el cálculo de probabilidades de este matemático, y por otro lado no alargar demasiado este capítulo.

Huygens, al final de su tratado propone cinco problemas sin demostración, cuya solución se da en <u>Ars Conjectandi</u> de James Bernoulli.

Los cinco problemas son los siguientes:

1.- "A" y "B" juegan con dos dados. "A" gana si obtiene un 6 y "B" gana si obtiene un 7. "A" tira una vez, después "B" tira dos veces, a continuación "A" tira dos veces y así sucesivamente hasta que uno de los dos gana. Puede demostrarse que la probabilidad de "A" es a la de "B" como 10.355 es a 12.276.

2.- Tres jugadores, A, B y C tienen doce bolas, ocho de las cuales son negras y cuatro blancas, y juegan de la siguiente forma: hacen una extracción con los ojos tapados y el primero que obtiene una bola blanca gana. En la primera vuelta empieza A, después B y sigue C, otra vez A y así sucesivamente. Determinar las probabilidades de los jugadores.

Bernoulli resuelve el problema bajo tres supuestos. En primer lugar supone que las extracciones de las bolas se hacen con reemplazamiento; en segundo lugar supone que sólo hay doce bolas y que las bolas no se reemplazan después de las extracciones, y en tercer lugar supone que cada jugador tiene su propio conjunto de doce bolas, y que las extracciones se hacen sin reemplazamiento.

3.- Si tienen cuarenta cartas y se forman cuatro grupos de diez cartas. A y B juegan extrayendo cuatro cartas que obtienen de cada grupo. Con estas condiciones se demuestra que la probabilidad de A es a la de B como 1000 es a 8.139.

4.- Se toman doce bolas, ocho negras y cuatro blancas. A y B juegan extrayendo siete bolas hasta obtener tres blancas. Comparar las probabilidades de A y B.

5.- A y B toman cada uno doce fichas y juegan con tres dados de tal manera que si A obtiene un once con los tres dados da un ficha a B, y si B obtiene un catorce con los tres dados da una ficha a A; gana el juego quien obtiene primero todas las fichas. Demostró que la probabilidad de A es a la de B como 244140625 es a 282429536481.

Insistimos de nuevo, en que los enunciados de estos problemas y en algunos casos las soluciones, se exponen aquí para dar información de las investigaciones realizadas por este autor, sin ánimo ninguno de profundizar en estos temas que nos desviarían excesivamente del núcleo central de esta tesis.

El tratado de Huygens, uno de los grandes matemáticos del siglo XVII, como ya se ha señalado, fue el mejor informe sobre el cálculo de probabilidades hasta que fué sustituido por otros más elaborados, como los de James Bernoulli, Montmort y De Moivre, que ya tendremos ocasión de referir al estudiar estos autores.

Ubaldo Nieto vuelve a opinar sobre Huygens:

> "Aunque sólo sea por la cristalización de las ideas de los matemáticos franceses, este autor ha ganado el derecho a ser considerado como el padre de la teoría de la probabilidad.
>
> Después de Huygens el interés de la probabilidad no fué solamente en el juego, aunque este continuó durante unos cien años aproximadamente.
>
> Su libro fué el primero que se publicó sobre cálculo de probabilidades y ejerció una gran influencia sobre Jaime Bernoulli y De Moivre, por tal razón, con Huygens el cálculo de probabilidades se puede dar por comenzado seriamente" (5).

Con esta cita se resalta una vez más la figura de Huygens y su aportación a la teoría de la probabilidad, y pensamos que con todo lo expuesto se pone de manifiesto la importancia de este autor.

Para acabar este epígrafe se mencionará muy brevemente a Leibnitz.

2.3.3.- Gottfried Wilhelm Leibnitz (1647-1716).

Godofredo Guillermo Leibnitz, filósofo, matemático, físico, teólogo y filósofo alemán, inventó el Cálculo Infinitesimal a la vez que Newton. Hacemos esta mención por la importancia que tiene como matemático, y en general por su reputación universal, lo que hace que sea importante considerar el gran interés que mostró por la teoría de la probabilidad.

Leibnitz afirma que era consciente de su importancia, aunque él no hubiera contribuido a su avance, y que se sentía atraido por los juegos de todo tipo.

2.4.- De los problemas particulares a las formulaciones generales

Antes hemos comentado la influencia que Christiaan Huygens tuvo sobre James Bernoulli, Montmort y De Moivre. Precisamente de ellos y del reverendo Thomas Bayes, quienes comienzan a formalizar de forma más general que sus antecesores, se ocupará este epígrafe; dejando para un posterior punto el estudio de Laplace, que va a ser el primero que cree escuela sobre una de las concepciones para la determinación de la probabilidad.

2.4.1.- James Bernoulli (1654-1705)

Para destacar la importancia de este personaje, veamos lo que dice D.E. Smith de la familia Bernoulli en su obra History of Mathematics:

> "De los paises europeos que ejercieron una influencia esencial en las matemáticas del siglo XVII, Suiza se mantiene probablemente a la cabeza. Esto no parece debido a influencias intelectuales particulares sino al esfuerzo de una de las más interesantes familias conocidas en la historia de la ciencia, la de los Bernoulli" (6).

La familia Bernoulli procedia de los protestantes belgas que fueron expulsados durante el reinado de terror del Duque de Alba, como ocurrió con otros pueblos protestantes expulsados de paises católicos en los siglos XVI y XVII. Por ello, toda la familia se traslada de Amberes a Suiza sobre 1650, instalandose definitivamente en este último pais.

Nueve de los miembros de la familia Bernoulli fueron eminencias en matemáticas y física, y cuatro de ellos tuvieron el honor de ser elegidos miembros de la Academia de Ciencias de París.

El primero de la familia en conseguir una reputación como matemático fué Jacques Bernoulli, llamado James Bernoulli por los escritores ingleses. Jacques Bernoulli nació en Basilea, el 27 de diciembre de 1654 y murió en la misma ciudad el 16 de agosto de 1705.

James estudió en primer lugar teología, decantándose más tarde por la astronomía, las matemáticas y la física. Para dedicarse a estos estudios estuvo en Bélgica, de donde procedía su familia, Holanda, Francia e Inglaterra, y volviendo a Suiza en 1682.

James Bernoulli fué de los continuadores del cálculo infinitesimal de Leibniz y Newton. Y entre sus innovaciones podemos señalar el usar por primera vez la palabra integral. En 1682 llegó a ser profesor de matemáticas en la Universidad de Basilea.

James Bernoulli mantuvo correspondencia con Leibniz y fué éste el que puso objeciones a su célebre teorema. Recordemos el enunciado del teorema en terminología actual: "La sucesión de frecuencias relativas de un suceso aleatorio converge en probabilidad a la probabilidad del suceso cuando el número de realizaciones crece indefinidamente".

Sobre este teorema, ambos autores van a mantener una larga y polémica correspondencia. Las objeciones de Leibniz al teorema de Bernoulli son constantes, al igual que las réplicas de este último a su oponente científico. En la última de las cartas de Bernoulli a Leibniz, fechada el 3 de junio de 1705 poco antes de morir, muestra dramáticamente sus desventuras: a la ingratitud de su hermano John trece años menor que él y siempre profundamente resentido por la superioridad intelectual de James, se unen los recelos de su maestro Leibniz y la penosa enfermedad que Bernoulli padece.

La célebre obra de James Bernoulli Ars Conjectandi sobre el cálculo de probabilidades, se publicó en 1713, ocho años después de su muerte ocurrida en 1705. Algunas referencias de la obra de James Bernoulli aparecen en la correspondencia entre Leibniz y John Bernoulli.

El prefacio de Ars Conjectandi fué escrito por su sobrino Nicolás Bernoulli, al que también le propusieron los editores acabar la cuarta parte de la obra que James Bernoulli dejó inconclusa. En realidad los editores hubiesen deseado que el trabajo fuese acabado por John Bernoulli, pero este no acedió a ello por lo que el encargo pasó a Nicolás Bernoulli, que ya se dedicaba a la teoría de la probabilidad y que tampoco consideró adecuada la empresa rechazandola, por lo que el trabajo quedó tal y como lo dejó su autor.

El Ars Conjectandi, que no aparece en la edición de sus obras completas, está dividida en cuatro partes:

La primera parte de esta obra es precisamente el tratado de Huygens que comentamos antes. Las páginas 1 a 71 dedicadas a De Ratiociniis in Ludo Aleae incluyen también un acertado comentario de Bernoulli sobre esta obra, comentario que algunos autores consideran de más valor que el propio tratado de Huygens. En esta parte cuando trata el Problema de los Puntos para dos jugadores, Bernoulli deduce las probabilidades de los jugadores cuando uno tiene que conseguir cualquier número de puntos menor o igual que nueve, y el otro cualquier número de puntos menor o igual que siete; esto puede extenderse a otras puntuaciones cualquiera. También investiga otros temas como: número de casos favorables de los distintos resultados que pueden obtenerse en cada tirada de las que pueden hacerse con dos o más dados, o bien en cuántas pruebas puede uno conseguir un seis con un solo dado.

Es necesario señalar aquí que James Bernoulli resuelve cuatro de los cinco problemas planteados por Huygens al final de su tratado, tal y como se dijo en la página 49 de este texto. Al quinto problema, que Huygens dejó sin resolver, Bernoulli le dá solución pero sin demostrarlo, y aportando un caso más general que el de Huygens, que puede verse en la página 71 de Ars Conjectandi.

La segunda parte, páginas 72 a 137, está dedicada a la teoría de combinaciones y permutaciones y en ella pretende conseguir una regla para hallar el número de permutaciones que pueden hacerse con un conjunto de elementos dado, cuando no existen repeticiones en él. De forma similar estudia también las combinaciones que pueden formarse con un número de elementos dado, tomandolos de uno en uno, de dos en dos, de tres en tres, etc. es decir el número de combinaciones que pueden formarse con "m" elementos tomados de "n" en "n", dando para ello un método semejante al Triángulo de Pascal.

La tercera parte, páginas 138 a 209, consta de las soluciones de veinticuatro problemas de juegos de azar. Veamos alguno de ellos:

"A" tira un dado y a continuación repite la tirada tantas veces como el número obtenido la primera vez. "A" consigue todo el premio si la suma de los números del último grupo de tiradas es superior a doce, obtiene la mitad del premio, si la suma de los números del último conjunto de tiradas es igual a doce, y no obtiene nada si la suma es menor que doce. Con todas estas condiciones propone determinar el valor de la expectativa del jugador "A".

Otro de los problemas tratados en esta parte es el llamado Bassette, que posteriormente será estudiado también por Montmort y De Moivre, al que dedica ocho páginas y cuyo objeto es calcular la ventaja de la banca en el juego.

Por último, en la cuarta parte de Ars Conjectandi, páginas 210 a 239, aplica la teoría de la probabilidad a algunas cuestiones interesantes de la ciencia económica. A pesar de que quedó incompleta por la muerte del autor, puede considerarse la más importante de la obra. Esta parte constaba de cinco capítulos y lo más notable de ella es el enunciado y estudio de lo que conocemos como teorema de Bernoulli, cuyo enunciado hemos expuesto anteriormente.

Los problemas de las tres primeras partes de Ars Conjectandi no pueden considerarse iguales en importancia y dificultad a las investigaciones de Montmort y De Moivre, de los que hablaremos en los dos próximos epígrafes, sin embargo debido al célebre teorema de Bernoulli, que lleva su nombre, desarrollado en la cuarta parte de esta obra, consigue que tanto Ars Conjectandi como su autor, James Bernoulli, adquieran una importancia fundamental en la historia de la teoría de la probabilidad.

Es interesante señalar que Bruno De Finetti, uno de los más importantes subjetivistas del que hablaremos en la parte central de esta tesis, considera que Ars Conjectandi es el primer tratado sobre cálculo de probabilidades cuando comenta:

> "Es importante aprender el arte de previsión, frase adaptada de Ars Conjectandi usada por James Bernoulli como título del primer tratado sobre el cálculo de la probabilidad" (7).

Sobre este tema D.E. Smith hace otro comentario mucho más amplio que el anterior, en el que además de hablar de Ars Conjectandi hace referencia a otras obras. Comentario que nos servirá, para adelantar, con los titulos de éstas, datos importantes de la teoría de la probabilidad:

> "El primer trabajo publicado sobre el tema fué probablemente un tratado de Huygens publicado en 1657. Pierre Rémond de Montmort publicó también un ensayo sobre el tema en 1708. Pero el primer libro dedicado enteramente a la teoría de la probabilidad fué Ars Conjectandi (1713) de Jacques Bernoulli. El segundo libro sobre el tema era Doctrine of Chances de De Moivre, o A Method of Calculating the Probability of Events in Play (1718); y el tercero, Laws of Chance de Thomas Simpson (1740). Uno de los trabajos más conocidos sobre la teoría es Theorie analytique des probabilités de Laplace, publicada en 1812" (8).

Recordemos que en este aspecto comentaba Ubaldo Nieto que De Raticiniis in Ludo Aleae era el primer libro que se publicó sobre cálculo de probabilidades (cita ya señalada anteriormente), pero sin lugar a dudas la referencia anterior es mucho más precisa.

Leonard J. Savage también se pronuncia en este sentido sobre la obra de Bernoulli cuando dice:

> "La obra póstuma de Jacob Bernoulli, Ars Conjectandi (1713), parece que es el primer esfuerzo coordinado sobre el tema" (9).

Queda pués manifiesta la relevancia de este autor en todos los comentarios que hemos hecho, pasamos entonces a estudiar a Montmort como habíamos anunciado al principio de este epígrafe.

2.4.2.- Pierre Remond de Montmort (1678-1719).

Pierre Remond de Montmort nació en París, el 27 de octubre de 1678, y murió también en París el 7 de octubre de 1719.

Montmort se dedicó en primer lugar a las leyes y la filosofía pero más tarde, después de casarse, comenzó lo que sería a partir de ese momento su dedicación intelectual principal, las matemáticas, y dentro de este campo, se interesó vivamente por la doctrina del azar, tema que motivó el que entablara relaciones cordiales con De Moivre, John y Nicolás Bernoulli.

La principal obra de Motmort sobre este tema, Essai d'analyse sur le jeux d'hasard, se publicó en París en 1708 y la segunda edición en 1714. Ambas ediciones se publicaron en tamaño holandesa, la primera edición tiene 189 páginas con un prefacio de 24 y la segunda 414 páginas. La diferencia de páginas entre la primera y la segunda edición se debe, en parte, a que en la segunda existe una introducción sobre combinaciones que ocupa de la página 1 a la 72, y por otra parte debido a que añade una serie de cartas entre Montmort y Nicolás Bernoulli, y una carta de John Bernoulli.

Leibniz mantuvo también correspondencia con Montmort del que tenía una opinión favorable como científico, sin embargo Leibniz comenta del trabajo de Motmort:

> "Hubiera deseado que las leyes de los juegos estuvieran un poco mejor descritas y los términos mejor explicados para los extraños y la posteridad" (10).

La introducción de la obra de Montmort refiere que su trabajo surge porque unos amigos le piden que determine la ventaja de la banca en el juego del Pharaon y esto le llevó a un trabajo en el que hace algunos comentarios sobre las supersticiones que tienen algunas personas dedicadas a los juegos de azar, a las que quiere demostrar que hay unas reglas de ese azar.

El trabajo de Montmort está dividido en cuatro partes: la primera contiene la teoría de las combinaciones, la segunda trata sobre juegos de cartas, la tercera sobre juegos de dados y en la cuarta expone la solución de varios problemas, entre los que están los cinco problemas propuestos por Huygens, citados en la pág. 48 de este texto. Recordemos que este autor es uno de los seguidores de Huygens.

Antes de la segunda edición de la obra de Montmort aparecen dos tratados sobre el tema: De arte conjectandi in Jure, de Nicolás Bernoulli, y De Mensure Sortis de De Moivre. Este último hace referencias ofensivas sobre el trabajo de Montmort y este para defender los argumentos de su obra expone un bosquejo de la teoría de la probabilidad desde sus orígenes, como fundamento de sus propias conclusiones. Este bosquejo de la historia de la teoría de la probabilidad resulta interesante, además del motivo por el que Montmort lo hizo, porque al tema de la historia de la probabilidad se la había prestado muy poca atención hasta entonces.

En la primera parte (1-72) de la obra Montmort argumenta, a priori, que el coeficiente del desarrollo de $(a + b)^n$ debe ser igual al número de casos que corresponden a las distintas formas en que pueden aparecer las caras blancas y negras de "n" fichas tiradas al azar, en que cada ficha tiene una cara blanca y una cara negra.

Otro de los problemas propuestos en la primera parte es como sigue: Se tienen p dados con el mismo número de caras y Montmort propone, encontrar el número de formas en que podemos obtener "a" unos, "b" doses, "c" tres, etc., cuando se tiran los dados al azar. El resultado en notación moderna sería:

$$\frac{p!}{a!\ b!\ c!\ \ldots\ldots\ldots\ldots}$$

En esta misma parte resuelve también problemas más complejos como: obtener "a" caras de un tipo, "b" de otro tipo, "c" de un tercer tipo, etc..., sin especificar que sean unos, doses o tres ....

En la segunda parte (páginas 73 a 172) del trabajo, Montmort da una solución propia del problema del Pharaon con dos tablas de resultados numéricos. Este juego fué también discutido por Nicolás Bernoulli y Euler.

Además del anterior, Montmort también discutió otros juegos, algunos también tratados por otros autores. Entre los juegos discutidos en la segunda parte están: Lansquenet, Treize, Bassette este último es muy parecido al del Pharaon, y ya fué tratado por James Bernoulli como referimos en la página nº 57 de este texto.

En la tercera parte (173-215) trata los juegos: Quinquenove, Hazard, Esperance, Trois Dez, Passe-dix, Rafle y Le Jeu des Noyaux. De estos Hazard y Raffle -o Raffling- son discutidos por De Moivre en su obra Doctrine of Chances como veremos posteriormente.

Como hemos dicho otras veces no se comenta en qué consisten estos juegos para no desviarnos demasiado del tema, aunque por otro lado interese nombrarlos con el objeto de aportar datos sobre los temas que trataron los autores, que estudiamos, en sus investigaciones.

En la cuarta parte páginas (216 a 282) incluye varias soluciones de problemas de azar, entre ellos los cinco de Huygens que hemos comentado anteriormente. Es importante indicar que algunas de estas coluciones son similares a las dadas en Ars Conjectandi por James Bernoulli.

También Montmort dedica algunas páginas al Problema de los Puntos (páginas 232 a 248) y da por primera vez dos fórmulas, siendo cualquiera de ellas una solución completa del Problema de los Puntos para dos jugadores teniendo en cuenta la diferencia de habilidad de ambos, en la primera edición lo hacía con igual habilidad. La habilidad de los jugadores se representa por la probabilidad que tiene cada uno de ganar en una sola prueba, con la condición de que la suma de ambas sea la unidad.

En la segunda edición hay cuatro problemas nuevos que merece la pena mencionar: el primero trata de una lotería que comenzó en París en 1710, el segundo es un problema sencillo de combinaciones, el tercero es un juego llamado <u>Le Jeu des Oublieux</u> y el cuarto es una extensión del problema número once de Huygens que se da también en el Ars Conjectandi de James Bernoulli.

También en esta segunda edición Montmort trata el problema de la <u>Duración del Juego</u>, que también es discutido por otros autores, entre ellos especialmente De Moivre, que lo trató con gran agudeza y éxito como luego veremos. Este último comenta en una carta dirigida al propio Montmort que la solución de este coincide con la de Nicolás Bernoulli y la demostración también está deducida de la primera solución de aquel. Esta carta puede encontrarse en la obra de De Moivre <u>Doctrine of Chances</u>, en la página 122 de su primera edición.

En general, podemos considerar importante el trabajo de Montmort por atreverse a tratar temas hasta ese momento tan poco elaborados y por la constancia que puso en ello.

Sobre la importancia de Montmort señala I. Todhunter:

> "No se puede comparar matemáticamente con James Bernoulli o De Moivre, ni parece tener formada una idea muy elevada de la verdadera dignidad e importancia del tema. Pero estuvo con entusiasmo dedicado a él, no escatimó su trabajo, y su influencia directa o indirecta estimuló los esfuerzos de Nicolás Bernoulli y De Moivre" (11).

Queda puesta de manifiesto en esta cita la influencia de Montmort sobre De Moivre que es el autor del cual hablaremos en el siguiente apartado.

2.4.3.- Abraham De Moivre (1667-1754).

Abraham De Moivre, geometra francés, nacido en Vitri-Champagne- el 26 de Mayo de 1667, y murió en Londres el 27 de Noviembre de 1754.

De Moivre pasó su vida a partir de los dieciocho años en Londres y por este motivo puede figurar con la escuela de matemáticos inglesa. Fué creador con Lambert de la trigonometría imaginaria e investigador importante del cálculo de probabilidades.

De Moivre tuvo la suerte de que cayera en sus manos la obra Principia de Newton con la que descubrió su desventaja en el campo de la matemática, a partir de entonces se dedicó de lleno a ella y por su constancia en el estudio llegó a ser un hombre de gran habilidad en la investigación. En 1697 fué admitido como miembro en la Royal Society. También ingresó en las Academias de París y Berlín.

Sus trabajos principales los encontramos en trigonometría y teoría de la probabilidad. En trigonometría formuló el teorema que lleva su nombre y que por su importancia, desviándonos un poco del tema que nos ocupa, reproducimos aquí:

$$(\cos x + \operatorname{sen} x)^n = \cos nx + i \operatorname{sen} nx$$

relación que conduce a interesantes identidades en la teoría de los números complejos.

En la teoría de la probabilidad es conocido por formular la regla que permite obtener la probabilidad de un suceso compuesto.

Publicó Doctrine of Chances, su obra fundamental en teoría de la probabilidad, en Londres en el año 1718, con posteriores ediciones en 1738 y 1756, esta última después de la muerte del autor. La obra fué dedicada a Newton, por la razón expuesta más arriba. Posteriormente fué editada en italiano en el año

1776 en Milán.

Doctrine of Chances fué el segundo libro más importante sobre teoría de la probabilidad de acuerdo con la cita número 8 de este mismo capítulo y era llamada también A Method of Calculating the Probabilities of Events in Play.

De Moivre escribió también una memoria De Mensura Sortis, referida anteriormente en la página 61 de este texto, de la que envió una copia a Montmort y este expresó su opinión sobre la obra en una carta dirigida a Nicolás Bernoulli publicada en la segunda edición del libro de Montmort.

La memoria recoge veintiseis problemas y algunos comentarios que explican como establecer la probabilidad. Para darnos una idea de la obra veamos lo expuesto en algunos de ellos:

El segundo problema es un caso particular del Problema de los Puntos y lo expresa así: Supongamos que "A" necesita cuatro puntos y "B" seis puntos y la probabilidad de que "A" gane un solo punto es a la de "B" como 3 es a 2. Es importante recordar que hasta ahora, en todo lo publicado sobre el problema, las probabilidades de los jugadores de ganar un sólo punto se habían considerado iguales, es decir se suponía igual habilidad en los dos jugadores. Según lo referido anteriormente Montmont trata este problema también con distinta habilidad de los jugadores pero en la 2ª edición después de la publicación de De Mensura Sortis.

El octavo problema es un ejemplo del Problema de los Puntos con tres jugadores.

Respecto al noveno problema, el quinto propuesto por Huygens para solucionar, ya hicimos referencia en la página 38 de esta tesis doctoral. En él encontramos publicada por vez primera la fórmula para determinar la probabilidad que cada uno de los dos jugadores tiene de arruinar al otro en un número ilimitado de jugadas.

Los problemas once y doce recogen el segundo problema propuesto por Huygens. En este caso, la interpretación dada por De Moivre coincide con la de James Bernoulli. El problema número trece corresponde al primero de Huygens, y el catorce corresponde al cuarto de estos problemas de Huygens, cuyos enunciados podemos encontrar en las páginas 48 y 49 de esta tesis doctoral.

Todos estos problemas vuelven a estar repetidos en <u>Doctrine of Chances</u>, a excepción de estos dos últimos (trece y catorce) por ser extremadamente sencillos. Los problemas que hacen los números quince a diecinueve también se encuentran en esta obra. Los problemas del veinte al veintiseis se refieren al problema de la <u>Duración del Juego</u>, tema que ya había sido tratado por Montmort, pero cuyo trabajo fué criticado muy duramente por De Moivre. (Ver página 64).

Muchos de los resultados publicados en la memoria De Mensura Sortis por De Moivre ya existían en los manuscritos de Ars Conjectandi y también en la correspondencia mantenida entre Montmort y los Bernoulli.

Hagamos ahora una pequeña referencia de la obra Doctrine of Chances.

Doctrine of Chances como ya hemos dicho fué publicada en 1718. La primera edición de ella fué dedicada a Newton y la segunda a Lord Carpenter. También existe otra diferencia entre las distintas ediciones: el prefacio de la primera edición termina refiriendose a Ars Conjectandi e invita a Nicolás y John Bernoulli a seguir el tema empezado en la cuarta parte de la misma, sin embargo este párrafo no figura en otras ediciones.

De Moivre envia una copia de esta obra a Montmort cuando fué publicada, aproximadamente dos años antes de que este último muriera.

En esta obra De Moivre hace un avance importante en la notación como es observar la ventaja de emplear una sola letra en lugar de dos o tres para representar la probabilidad de que ocurra un suceso. Así, si "p" representa a la probabilidad de que ocurra un suceso, "1-p" representará la probabilidad de su fracaso; y si "q" y "r" representan a las probabilidades de ocurrencia de otros dos sucesos, entonces $p(1-q)(1-r)$ representará la probabilidad de que ocurra el primero a la vez que ocurre el fracaso de los otros dos. Esta simplificación de la notación es importante para los problemas de este tipo.

Aunque en la primera edición de Doctrine of Chances sólo había cincuenta y tres problemas, en ediciones posteriores esta cifra se amplia a setenta y cuatro. Evidentemente no es este el lugar oportuno para considerar los setenta y cuatro problemas citados, por lo que sólo traeremos a colación aquellos que nos sirvan para continuar la trayectoria comenzada en epígrafes precedentes.

Por ejemplo, el problema número seis de esta obra es un caso particular del ya citado Problema de los Puntos con tres jugadores, para el cual De Moivre propone la misma solución que Fermat. En la segunda edición De Moive también discute algunos casos sencillos de este problema siguiendo el método que utilizó Pascal para resolver el problema con dos jugadores. Además De Moivre propone también una regla para resolver este problema cualquiera que sea el número de jugadores, basándose en el método de Fermat que comentábamos con anterioridad. Esta regla ya había sido publicada por el mismo autor en su obra Miscellanea Analytica, editada en Londres en 1730. En la segunda edición de Doctrine of Chances, publicada en 1738, se explica este método en las páginas 191 y 192.

Otro de los problemas, como son el trece y el catorce, han sido ya tratados en epígrafes anteriores. Nos referimos al juego de Bassete y al juego del Pharaón. Este útlimo problema vuelve a ser tratado también en el problema treinta y trés, en el que De Moivre trata de encontrar qué tanto por ciento consigue la banca en el juego del Pharaón del total del dinero apostado.

En los cinco problemas numerados del quince al veinte, De Moivre etablece, mediante sencillos ejercicios de probabilidad, una teoría de permutaciones y combinaciones. Esta teoría de combinaciones también es aplicada para resolver los problemas veintisiete a treinta y dos, que se refieren al juego llamado Quadrille, y en los problemas números cincuenta y uno a cincuenta y seis, donde ejemplos sencillos de combinaciones son aplicados a la resolución de los juegos de Piquet.

Tres juegos ya citados y analizados anteriormente por Montmort, van a ser retomados por nuestro autor. Nos referimos a los siguientes: el llamado Treize, que ocupa los problemas números treinta y cinco y treinta y seis de la obra de De Moivre, pero que no es tratado por este autor con la misma profundidad que lo habían hecho en su correspondencia Nicolás Bernoilli y Montmort; el llamado Hazard, que ocupa el problema número cuarenta y seis, y sobre el que Montmort había obtenido un resultado parecido al de De Moivre; y el llamado Raffling, que ocupando los problemas números cuarenta y ocho y cuarenta y nueve de la obra de De Moivre, había sido estudiado por Montmort en las páginas 207 a 212 de su ya citada obra Essai d'analyse sur le jeux d'hasard.

Este último problema, el llamado Rafling, es un juego de tres dados. Al tirar tres dados pueden darse resultados triples, dobles, o ni triples ni dobles, esto es una combinación de tres resultados diferentes. Contando sólo las tiradas en las que los resultados fueran triples o dobles, tanto De Moivre como Montmort establecen una tabla numérica de probabilidades. Este último autor, trata más en profundidad el tema que Montmort, además, rebate la posible originalidad del juego, atribuyendo a Francis Robartes el primer estudio de este juego veinte años antes de la publicación del trabajo de Montmort.

Otro de los temas importantes de la aportación de este autor a la historia de la teoría de la probabilidad es su estudio del problema de la Duración del Juego, del cual ya había publicado algunas investigaciones en su obra De Mensura Sortis, como comentábamos anteriormente, y que también fué tratado por Montmort. Más adelante este problema llamará también la atención de Lagrange y de Laplace. De este último hablaremos en un epígrafe posterior, pero de Lagrange, a pesar de su importancia como matemático, no volveremos a hablar, por no ser suficientemente representativo en la historia que nos ocupa.

Después de citar el problema de la Duración del Juego en De Mensura Sortis, De Moivre vuelve a tratar este tema en la tercera edición de Doctrine of Chances, en varios problemas que más tarde señalaremos. Pero antes, debemos exponer el enunciado general del problema de la Duración del Juego: Supongamos que un jugador "A" tiene "m" fichas y que otro jugador "B" tiene, a su vez, "n" fichas. Si las probabilidades que tienen estos jugadores de ganar una sola jugada se dan en la relación equivalente al cociente a/b, y el juego se hace de tal forma que el perdedor de cada jugada tiene que dar una ficha a su adversario, calcular la probabilidad de que un jugador haya ganado todas las fichas de su contrario antes de un cierto número de jugadas. Con la relación a/b entre las posibilidades de que cada jugador gane una jugada queda establecida la distinta habilidad de los jugadores.

Los problemas que tratan sobre este tema en Doctrine of Chances son los siguientes: el cincuenta y ocho y el cincuenta y nueve, en los que resuelve el problema para el caso de $m = n$; el sesenta y tres y el sesenta y cuatro, en los que resuelve el problema según las condiciones del enunciado general, esto es, sin la condición previa de $m = n$; y el que hace el número sesenta y cinco, en el que expone un caso particular del problema con el número "m" de fichas del jugador "A" infinito. En este caso, al ser el capital de "A" ilimitado, el problema se plantea calculando la probabilidad de que "A" arruine a "B" en un número determinado de jugadas.

Otra de las grandes aportaciones de De Moivre a la teoría de la probabilidad es el teorema que lleva su nombre, por el que aproxima mediante una curva la distribución binomial a la normal. Por esta razón se considera que la idea de esta última distribución se debe, precisamente, a este autor.

De Moivre es, en cualquier caso, el gran perfeccionador de esta parte de las matemáticas, a pesar de que le han surgido un gran número de detractores y que sus aportaciones fueron siempre muy discutidas. Thomas Bayes, del que pronto hablaremos, sale al paso de estos detractores de De Moivre, y defiende a este autor cuando señala:

> "Estan muy equivocados quienes han insinuado que Doctrine of Chances es trivial como estudio matemático, y que no puede tener un sitio en una investigación seria" (12).

En este mismo sentido se manifiesta también I. Todhunter, cuando expresa:

> "No hay duda de que la Teoría de la Probabilidad debe más a él (De Moivre) que a cualquier otro matemático, con la única excepción de Laplace" (13).

Compartimos estas opiniones, pues también en nuestra consideración este es uno de los autores fundamentales de la historia de la teoría de la probabilidad, consideración que creemos justificada por los datos que hasta ahora han sido aportados en esta exposición.

En el siguiente apartado de este epígrafe hablaremos de otro autor de similar importancia a éste. Nos referimos a Thomas Bayes, al que acabamos de citar defendiendo precisamente la importante obra de su predecesor De Moivre.

2.4.4.- Rev. Thomas Bayes (1702-1761).

El reverendo inglés Thomas Bayes nació en 1702, fué el primero de los hijos del matrimonio compuesto por Ann Bayes y Joshua Bayes, éste último también pastor protestante. A pesar de la importancia de este hombre en la teoría de la probabilidad se conoce muy poco sobre su historia personal, hasta el punto que les fué imposible fijar con certeza su lugar de nacimiento. Ni Todhunter, en su ya citada Historia de la Teoría de la Probabilidad, ni G. A. Barnard en su nota biográfica de 1958 sobre este autor (14), ni otros autores que señalan datos personales de Bayes hacen referencia a este punto. No resulta extraño que estos autores tampoco fijen con certeza el dato de su nacimiento, pues incluso The Dictionary of National Biography, recopilado al final del siglo pasado, que dedica un apunte al padre de Bayes, Joshua Bayes, como uno de los primeros pastores protestantes que fué ordenado publicamente como tal, no aclara nada sobre su hijo Thomas. En otras obras específicas, concretamente tratados de las historia de las matemáticas, tales como los de Loria (1933) y Cantor (1908), se habla de sus contribuciones a la teoría de la probabilidad y al análisis matemático, pero se omite , en todas ellas, los detalles biográficos personales. A pesar de estas dificultades hemos podido comprobar en la Enciclopedia Británica que Thomas Bayes nació en Londres y murió el 17 de Abril de 1761 en Tunbridge Wells, Kent.

Por las razones expuestas, los datos biográficos aquí aportados han sido tomados de la ya citada nota biográfica de G. A. Barnard sobre Thomas Bayes.

Pudiera ser que Thomas Bayes hubiera dado sus primeros pasos en la ciencia matemática como alumno de De Moivre, ya que G. A. Barnard comenta que en la época que Bayes cuenta con doce años, Bernoulli escribe a Leibniz comentando cmo el "pobre De Moivre" se ganaba la vida en Londres como profesor de matemáticas. Y no es descabellado pensar entonces, como señala Barnard, que Bayes hubiera aprendido esta ciencia con uno de los fundadores de la teoría de la probabilidad.

Con el tiempo, Thomas Bayes fué ordenado pastor protestante, y comenzó su ministerio con la ayuda de su padre, que como veíamos también era pastor y había sido nombrado por entonces pastor de los Presbiterianos en Leather Lane. Más tarde, siendo pastor en Tunbridge Wells, Bayes escribe, en 1731, un tratado titulado: Divine Benevolence, or an attempt to prove that the Principle End of the Divine Providence and Government is the happiness of His Creatures, que fué publicado por John Noon. En este tratado Bayes argumenta que el fin principal de la Deidad es la felicidad de sus criaturas. Para tener una idea más clara de las teorías de Bayes reproducimos aquí el siguiente párrafo contenido en la carta enviada por Mr. Prince a John Canton sobre un artículo de Bayes:

> "El propósito que me guía es demostrar la razón que tenemos para creer que hay en la constitución de las cosas leyes fijas, por las cuales los sucesos ocurren, y que, por tanto, el esquema del mundo debe ser el resultado de la sabiduría y el poder de una causa inteligente, y así confirmar el argumento de las causas últimas para la existencia de Dios" (15).

Podemos considerar precisamente en este intento de establecer unas leyes fijas, que procederían de una causa inteligente y superior, sobre la ocurrencia de los sucesos, y con la que Bayes se proponía demostrar la existencia de Dios, una de las razones por las que este autor se vuelca en la teoría de la probabilidad, dedicando a esta parte de las matemáticas más esfuerzo que a otras.

Thomas Bayes se retirará de sus obligaciones como pastor en 1752, siendo sucedido en su ministerio por Willian Johnston, quien también heredaría la valiosa biblioteca de Bayes. Según algunos autores este abandono fué voluntario, pero para otros fué debido a un problema que se le planteó con un grupo de pastores independientes de Londres que llegaron a su capilla en 1750.

La importancia de Bayes en la historia de la teoría de la probabilidad que nos ocupa es decisiva. Este autor es el iniciador de una de las más importantes partes de esta teoría al comenzar a aplicar el método de obtener las probabilidades de las causas por las que puede haber sido producido un suceso que se ha observado.

Según la opinión de D. J. Struik, Bayes comenzó esta investigación que fué posteriormente desarrollada por Laplace:

> "Laplace rescató del olvido y volvió a formular una teoría esbozada por Thomas Bayes, un oscuro clérigo inglés, que fué publicada en 1763-64 después de su muerte. Esta teoría llegó a ser conocida como la teoría de las probabilidades inversas" (16).

Es necesario exponer aquí, para dejar clara esta teoría de la que habla el autor citado, que se llaman probabilidades inversas a las probabilidades de las causas por las que puede haber sido producido un suceso observado. Sobre la teoría de las probabilidades inversas y en general sobre la importancia de Bayes, el doctor Ubaldo Nieto de Alba comenta:

> "El reverendo Thomas Bayes es el autor de la fórmula de la probabilidad inversa, publicada en 1763, así como de su famoso postulado, que todavía hoy se encuentra en los tratados de Estadística Matemática. No obstante, queda asegurada su inmortalidad teniendo en cuenta que fué el primero en utilizar la probabilidad en el razonamiento inductivo" (17).

Las dos memorias de las que se tiene constancia que Bayes publicó sobre teoría de la probabilidad son: An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances y A Demostration of the second Rule in the Essay towards the solution of a Problem in the Doctrine of Chances, publicadas ambas en la revista The Philosophical Transactions después de la muerte de Bayes. Estas dos memorias habían sido comunicadas por Mr. Richard Price a Mr. John Canton en una carta, después de que aquel encontrara ambos ensayos entre los artículos de su amigo Bayes, una vez fallecido éste.

La primera de estas memorias ocupa las páginas 370 a 418 del volumen 53 de Philosophical Transactions, publicado en 1764, mientras que la segunda ocupa las páginas 296 a 395 del siguiente volumen, esto es, el 54 de la misma publicación, editado en el año 1765.

En la primera de dichas memorias, Bayes expone una breve demostración de las leyes generales de la teoría de la probabilidad, a partir de las cuales establece su famoso teorema, cuyo enunciado obviamos por ser suficientemente conocido; más adelante el autor propone el modo de calcular la probabilidad de un suceso compuesto.

Otro de los teoremas que Bayes propone en sus ensayos es el siguiente: Si un suceso ha ocurrido "p" veces y fracasado "q" veces, la probabilidad de que su posibilidad de ocurrir en una sola realización esté entre "a" y "b" es igual a

$$\frac{\int_a^b x^p \, (1-x)^q \, dx}{\int_o^1 x^p \, (1-x)^q \, dx}$$

Mr. Price, del cual ya comentamos antes que encontró los artículos de Bayes, quedó tan sorprendido por las demostraciones de su amigo que continuó estudiando este tema, sobre el que realizó laboriosas investigaciones.

Es importante mencionar también una carta que el propio Bayes escribió a John Canton sobre <u>Series Asintóticas</u> y que fué publicada en la ya citada <u>Philosophical Transactions</u> en 1763, en las páginas 269 a 271 correspondientes al volumen 52. Este trabajo matemático es <u>breve</u> y de <u>gran calidad</u>, al igual que el resto de los trabajos de este autor sobre la teoría de la probabilidad. Y quizá sean estas dos expresiones -brevedad y gran calidad- las que mejor definan y resuman la labor de Bayes.

Por tanto, a pesar de la brevedad de sus trabajos matemáticos, a pesar de que sus tratados sobre teoría de la probabilidad fueron publicados después de su muerte, y a pesar de que sólo comenzó una investigación que desarrolló más tarde Laplace, Bayes tiene una gran resonancia en la historia de la teoría de la probabilidad, fundamentalmente, como hemos visto, por la importancia del tema de la probabilidad inversa, tema del que este "oscuro clérigo" fué el precursor.

Una vez estudiado Bayes, pasamos a estudiar, en un epígrafe distinto, a Pierre Simon Laplace, como conformador y formalizador de una de las interpretaciones sobre el modo de calcular la probabilidad que va a crear escuela, la escuela de la teoría clásica de la probabilidad.

En ese epígrafe observaremos que algunas de las opiniones de Laplace utilizadas para calcular la probabilidad como cantidad numérica ya han sido utilizadas por sus antecesores en los problemas de juegos que tanto hemos citado hasta ahora; pero, en este caso, Laplace lo que hace, a nuestro entender, es dar carácter general a la teoría.

El hecho de dedicar a Laplace un epígrafe entero puede resultar desproporcionado al resultar este epígrafe mucho más breve que los anteriores, sin embargo creemos conveniente estudiar a este autor en un epígrafe distinto a sus antecesores en tanto en cuanto, precisamente por todo lo que acabamos de exponer, encontramos en este autor la primera formalización de la teoría clásica de la probabilidad.

2. 5.- Pierre Simon Laplace (1749-1827). La formalización de la teoría clásica de la probabilidad.

El nombre de Pierre Simon Laplace, uno de los personajes más importante de la historia de la teoría de la probabilidad que estamos tratando, ha sido ya mencionado en diversas ocasiones a lo largo de este trabajo. Comenzaremos este epígrafe, tal como lo hemos hecho anteriormente, citando algunos datos biográficos que nos ayuden a situar a este autor en su contexto intelectual.

El matemático y astrónomo francés que llegaría a ser con el tiempo marqués de Laplace, nació en la más absoluta miseria en Beaumont-en-Auge (Calvados), un 23 de marzo de 1749, y murió -ya marqués- el 5 de marzo de 1827 en París. En esta ascensión personal influyeron, además de sus buenísimas dotes para la política, la protección de algunos intelectuales de la época, que admirados por la capacidad del joven Laplace costearon su educación. Precisamente, con la ayuda de D'Alembert, consiguió una plaza de profesor de matemáticas en la escuela militar de Beaumont, lo que le dió gran reputación. Más tarde, tomó parte en la organización de la Escuela Politécnica y de la Escuela Normal donde también llegó a impartir lecciones.

Sus grandes dotes de oportunidad para la política le llevaron a anteponer sus intereses personales sobre sus creencias políticas. Así, a pesar de ser monárquico, destacó pronto entre los seguidores de Napoleón Bonaparte, quien le dió el título de Conde y le nombró Ministro del Interior en 1799. Pero el genio militar no soportó durante demasiado tiempo al genial y excéntrico matemático y antes de los seis meses le hizo dimitir con el comentario de que "tenía en su trabajo el espíritu de lo infinitesimal" (18).

Una vez restaurada la monarquía en Francia, Laplace volvió a tomar el carro de sus primitivas creencias políticas apoyando a Luis XVIII, quien en recompensa le ascendió en la nobleza nombrándole marqués en 1817.

La capacidad intelectual de Laplace le permitió tocar diversos campos de la ciencia, por ello su nombre está fundamentalmente relacionado con la astronomía, la mecánica celeste, la geodesia, la teoría de la probabilidad, el cálculo, y las ecuaciones diferenciales. Sus dos principales obras en el campo de la astronomía y la mecánica celeste son: Exposition du Système du monde, publicada en París, en el año 1796, en dos volúmenes, y Traité de mecanique céleste, que se publicó también en París, entre los años 1799 y 1825, y que consta de cinco volúmenes.

Remitiéndonos al campo que a nosotros más nos interesa, esto es, al campo de la probabilidad, Laplace escribió numerosas memorias que más tarde incorporaría a su gran obra Théorie Analytique des Probabilités publicada en París, en el año 1812 y reeditada más tarde, también en París, en los años 1814, la segunda edición, y 1820, la tercera.

Dado que, como hemos dicho, la mayoría de las memorias fueron más tarde incorporadas a esta obra, hablaremos primero de ellas, para más adelante referirnos a la estructura general de su obra compiladora, de esta forma mantenemos una coherencia cronológica en la estructura del pensamiento de este autor. Como es lógico, pasaremos revista esencialmente a aquellas memorias que tratan aspectos relacionados con la teoría de la probabilidad.

La primera de estas memorias -cronológicamente hablando- lleva por título <u>Memoire sur les suites récurro-recurrentes et sur les usages dans la théorie des hasards</u>, y en ella nuestro autor considera tres problemas.

El primero de ellos, el ya mencionado repetidamente en este trabajo de la <u>Duración del Juego</u>, que como vimos había sido tratado anteriormente por De Moivre y Montmort, se encuentra resuelto en las páginas 225 a 238 de la primera edición de <u>Théorie Analytique des Probabilites</u>. Laplace plantea aquí el problema para el caso de dos jugadores con igual habilidad e igual capital, para más tarde resolverlo para un caso particular en el que cada jugador aplique distinta habilidad pero manteniendo la condición de capitales (número de fichas en el enunciado general del problema que hacíamos antes) iguales para ambos jugadores. Recordemos que este último caso en el que "m = n" (siguiendo la notación enunciada en el epígrafe 2.4.3) es precisamente el que resuelve De Moivre en los problemas números cincuenta y ocho y cincuenta y nueve de su obra Doctrine of Chances. Pero volviendo a nuestro autor, esto es a Laplace, debemos señalar que su aportación es resolver este problema mediante una ecuación en diferencias finitas con una variable independiente.

El segundo es un problema relacionado con una lotería sin excesiva dificultad, y el tercero, cuya solución se da en la página 201 de la citada primera edición de Théorie..., consiste en tomar al azar de un montón de fichas un número cualquiera de ellas y determinar la probabilidad de que el número de fichas tomadas sea "par" o bien la probabilidad de que este número sea "impar".

Otra de las memorias es la titulada Memoire sur la probabilité des causes par les évènemens, y en ella Laplace enuncia por primera vez y de una manera clara el principio para la estimación de las probabilidades de las causas por las que puede haber sido producido un suceso observado. Recordemos que este tema es precisamente el tema de la probabilidad inversa que ya había tratado Bayes; sin embargo, Laplace no hace aquí ninguna referencia a su predecesor.

En esta misma memoria se trata también el antiguo Problema de los Puntos, del que venimos hablando desde los tiempos de Pascal y Fermat y que ha sido tratado por casi todos los autores citados en este trabajo. También define aquí el concepto de media, y lo hace en dos sentidos: en sentido aritmético, como promedio de todos los valores observados; y, en sentido geométrico, como el valor que correspondería a la abscisa del centro de gravedad del área encerrada bajo una determinada curva.

En otra memoria, publicada en 1776 bajo el título de Recherches sur l'intégration des Equations differentielles aux différences finies, et sur leur usages dans la theorie des hasards, se ocupa de diversos temas de la teoría del azar que ya han sido citados en páginas anteriores.

Así, hace observaciones de carácter general sobre lanzamientos de monedas, o sobre la probabilidad de obtener un número par o impar de fichas al coger de un conjunto de ellas. También se ocupa del Problema de los Puntos para los casos de dos o tres jugadores, resolviendolo mediante una ecuación en diferencias finitas. Para el caso de tres jugadores propone una solución que depende del desarrollo de una expresión multinomial idéntica a la obtenida por De Moivre. Trata también el Problema de la Duración del Juego, que como vimos ya había sido tratado en la primera memoria que de este autor citamos. Aquí discute el problema para jugadores con capitales iguales y capitales distintos, pero no se plantea la posibilidad de habilidades diferentes para los jugadores.

Otras memorias interesantes que podemos citar aquí son: Memoire sur les Probabilités, publicada en 1781; y Mémoire sur les suites, que publicada en 1782, aborda el tema de la Teoría de Funciones Generatrices, cuya utilidad en la estadística moderna es obvia.

En este sentido, es importante citar un ejemplo claro de como los temas tratados por este autor cambian profundamente de los tocados por sus antecesores. Mientras antes de Laplace se investigan fundamentalmente problemas de juegos, es a partir de él cuando comienza a hacerse una formulación adecuada de los temas de teoría de la probabilidad. Así, en su memoria Sur les naissances les mariages et les morts á Paris, Laplace aborda un tema de inferencia estadística sobre población inaugurando un campo de aplicación de la ciencia estadística a las ciencias sociales, que tanto se va a aplicar en el futuro. Laplace encara el problema de la siguiente forma: supone conocido el número de nacimientos de un año completo en Francia, y supone conocido también, o muy fácil de determinar, el número de nacimientos y la población total de un determinado distrito. Suponiendo entonces que la razón de la población total al número de nacimientos, en un año, es la misma en todo el país que en ese distrito, no resultaría difícil calcular así la población total francesa. Laplace plantea además una investigación sobre los márgenes de error, investigando la probabilidad de que el error en el resultado inferido no supere una determinada cantidad. El autor llega a la conclusión de que, para que el resultado sea preciso y fiable, el distrito debe tener al menos un millón de habitantes. En este problema, que ocupa las páginas 391 a 394 de la citada primera edición de Théorie Analytique des probabilités, vemos un claro ejemplo, a pesar de su planteamiento rudimentario, de un moderno problema de inferencia estadística aplicado a la determinación de la población.

Otras dos memorias importantes deben ser citadas por la relación con la teoría de la probabilidad: la publicada en 1810 bajo el título de Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de trés grandes nombres, et sur leur application aux probabilités; y la de 1811, que fué publicada con el título de Mémoire sur les Intégrales Définies, et leur application aux Probabilités et spécialement á la recherche du milien qu'il faut choisir entre les résultats des observations.

Además de las memorias citadas, Laplace publica también sobre estos temas gran número de artículos en la Revista Connaissance des Tems, y en ellos, el autor relaciona la teoría de la probabilidad con otros temas, al igual que en las dos últimas memorias citadas. La versatilidad de este autor, así como su gran capacidad para advertir las posibilidades de aplicación de la teoría de la probabilidad a otros campos demuestran una vez más su importancia en la historia que estamos tratando.

Por citar sólo algunos ejemplos de estos artículos nombraremos aquellos que puedan resultar esclarecedores de la auténtica verstatilidad de Laplace. Así, merece la pena citar: "Sur L'application du calcul des probabilités á la Philosophie naturelle" y, sobre el mismo tema, "Sur le calcul des probabilités appliqué a la Philosophie naturelle", ambos publicados por

Connaissance des Tems en 1818, pero que habían sido fechados por su autor en 1815. Como más tarde veremos, estos temas serán tratados de nuevo en su gran obra, Teorie Analytique des Probabilites. Otros artículos publicados en la misma revista son: "Application du calcul des probabilités aux opérations géodésiques", de 1818 y "Application du calcul des probabilités aux operations géodésiques de la méridienne de France", publicado en 1822, pero fechado en 1820.

Todos estos artículos, así como casi todas las memorias citadas en las páginas precedentes fueron posteriormente incluídas en la ya citada gran obra de Laplace, Théorie Analytique des Probabilités. Por ello, es conveniente dedicar algunos párrafos a esta obra, de la que Ubaldo Nieto comenta:

> "Pierre Simon Laplace (1749-1827) publica en 1812 su Theorie Analytique des Probabilité, obra que se suele considerar como la mayor aportación a la probabilidad y que incorpora todos los trabajos pequeños de Laplace que se extienden durante cuarenta años" (19).

Esta obra, publicada por primera vez en París en 1812, es reeditada posteriormente en 1814 y 1820, como se había indicado anteriormente. Al estar dedicada a Napoleón, por las razones antes expuestas, y al publicarse después de la caída del Emperador, la obra de Laplace fue muy censurada.

La introducción a esta magna obra fué publicada por separado con el título de Essai philosophique sur les probabilités en el año 1814, y posteriormente fué incorporada a la segunda edición de ese mismo año. En ella se contienen las reflexiones de Laplace sobre la epistemología de la probabilidad. Sobre esta introducción D. J. Struik sostiene:

> "Essai philosophique sur les probabilités es una interesante introducción a la teoría de las probabilidades; contiene la definición "negativa" de Laplace sobre las probabilidades mediante el postulado de los "sucesos igualmente probables": la teoría del azar consiste en la reducción de todos los sucesos del mismo tipo a cierto número de casos igualmente probables que son casos tales que, nosotros estamos igualmente indecisos acerca de su existencia, y la determinación del número de casos favorables al suceso del que necesitamos la probabilidad" (20).

En la definición de Laplace, recogida en la cita de Struik, está contenido lo que nosotros llamamos principio de indiferencia; y cuando admitimos este principio, estamos diciendo que los sucesos son igualmente probables. Es decir, en otras palabras, cuando no existe razón alguna que favorezca la presencia de un suceso más que la de otros. En las cuestiones de probabilidad Laplace mantiene que en parte ignoramos y en parte conocemos.

En esta introducción hay una sección titulada Des méthodes analytiques sur calcul des probabilités dedicada, fundamentalmente, a la teoría de las funciones generatrices. Entre comentarios sobre juegos y leyes de probabilidad, ésta sección se completa con unas páginas dedicadas al teorema de Bernoulli y sus consecuencias y a la aplicación del cálculo de probabilidades a las ciencias morales.

Otras secciones del Essai ... laplaciano abordan multitud de temas en los que volvemos a ver la preocupación de este autor por las aplicaciones de la ciencia de la probabilidad. Citaremos algunas a modo de ejemplo: De la probabilité des témoignages, De la probabilité des Jugemens des tribunaux, Des Tables de mortalité et des durées moyennes de la vie, des mariages et des associations quelconques, Des .ilusions dans l'estimations des probabilités, etc. Precisamente en la última sección de esta introducción, cuyo título es Notice historique sur le calcul des Probabilités, Laplace matiza la importancia histórica de esta rama del conocimiento, y así, el último párrafo del autor es el siguiente:

> "... es extraordinario que una ciencia que comenzó considerando el tema de los juegos, haya dado lugar por ella misma a uno de los más importantes objetos de conocimiento humano" (21).

Observación que evidentemente compartimos y que es de alguna forma la motivación principal de este capítulo que pronto concluiremos, pues en el desarrollo histórico de la teoría de la probabilidad se encuentran las claves de su importancia actual.

Dejando ya a un lado esta introducción que tanto espacio nos ha ocupado, debemos entrar a comentar la estructura general de la obra de Laplace, que repetidamente hemos tildado aquí de su gran obra. Théorie Analytique des Probabilités consta de dos volúmenes: el primero de ellos titulado Du calcul des Fontions Génératrices, que presta especial atención a la notación y en el que se resuelven diversos problemas matemáticos que atañen a la teoría de la probabilidad; y el segundo, titulado Théorie Générale des Probabilités, en el que se establecen unos principios generales de la teoría de la probabilidad con problemas relacionados con loterías, extraciones de bolas de una urna, el ya famoso Problema de los Puntos, con algunas modificaciones, y el también muy tratado problema de la Duración del Juego, que ya se encontraba en algunas de las memorias citadas anteriormente.

La obra consta de un total de once capítulos, de los que citaremos algunos para hacernos una idea de los temas tratados por Laplace. Así, el capítulo tercero, bajo el título de Des lois de la probabilité que resultent de la multiplication indéfinie des événemens trata entre otros temas del teorema de Bernoulli. El cuarto, De la probabilité des erreurs des resultats moyens d'un grand nombre d'observations et des résultats moyens les plus avantageux, es según I. Todhunter:

> "(...) el más importante de la obra de Laplace, y quizá el de más dificultad; contiene la extraordinaria teoría del método de los mínimos cuadrados" (22).

También D. E. Smith valora la importancia de la teoría del método de los mínimos cuadrados cuando señala:

> "Uno de los trabajos más conocidos sobre teoría de la probabilidad es Théorie ... de Laplace, (...). En él expone sus demostración del método de los mínimos cuadrados" (23).

La obra de Laplace y sus demostraciones del método de los mínimos cuadrados están indisolublemente unidos, como demuestra la cita de Smith, que inmediatamente relaciona la publicación de la obra de Laplace con esta teoría.

En el mismo sentido, pero de forma más concreta, Ubaldo Nieto señala la importancia del método laplaciano, especificando de forma precisa el origen de este método:

> "En la mecánica celeste es donde se originó el método de los mínimos cuadrados, que condujo a Laplace (así como a Gauss) a la ley normal al estudiar la distribución de los errores de las observaciones. Bajo la influencia de sus trabajos se consideró durante mucho tiempo, casi como un axioma, que todas las distribuciones estadísticas se aproximarían a la normal si se dispusiera de un número suficientemente grande de observaciones y estas fueran bien hechas" (24).

La afortunada cita del doctor Ubaldo Nieto pone de manifiesto no sólo el origen del método de Laplace, sino también que mediante él se puede estudiar la ley normal, ley imprescindible y fundamental en la estadística.

Los capítulos quinto y sexto titulados: Application du calcul des probabilités á la recherche des phenoménes et leur causes, y De la probabilité des causes et des événements futurs, tireé des événements observés, tratan temas significativos como demuestran sus títulos. Un apéndice y tres suplementos que corresponden a las memorias reseñadas en la página 76 de este texto, completan la gran obra de Laplace.

Por todo lo expuesto hasta ahora, es evidente que nos encontramos ante un autor de espectaculares dimensiones por diversas razones: por la variedad de los temas tratados, por la innovación que supone tratar determinados temas en la prolija cantidad que Laplace lo hizo en todas las memorias reseñadas, por la propia originalidad de esos temas -tengamos en cuenta que hasta este autor los anteriores estudiosos de estos temas sólo se habían preocupado, en cuanto a la teoría de la probabilidad se refiere, a los problemas de juegos- por la formalización de métodos tan importantes como el de los mínimos cuadrados, por haber desarrollado el tema, también de la máxima importancia, de la probabilidad inversa que Bayes había iniciado, etc.

Por todo ello, creemos más que justificado decir que de todos los autores estudiados en este capítulo Laplace es el más importante, y en esto coinciden diversos autores, entre ellos I. Todhunter que señala al respecto:

> "En general la teoría de la Probabilidad está más en deuda con Laplace que con cualquier otro matemático" (25).

NOTAS AL CAPITULO II

(1) Karl R. POPPER, La lógica de la investigación científica. Ed. Tecnos. Madrid 1977. Pág. 191.

(2) Ubaldo NIETO DE ALBA, Introducción a la estadística. Vol. II. Ed. Aguilar. Madrid 1975. Pág. 32.

(3) U. NIETO. Op. cit. Vol. II. Pág. 35.

(4) Ibidem.

(5) Idem. Pág. 36.

(6) David Eugene SMITH. History of Mathematics. Vol. I. Dover Publications INC, New York 1958. Pág. 426.

(7) Bruno DE FINETTI. Theory of Probability. Ed. Wiley. 1979. Pág. 72.

(8) D. E. SMITH. Op. cit. Vol. II. pp: 529-530.

(9) Leonard J. SAVAGE. The Foundations of Statistics. Ed. Dover 1971. Pág. 1.

(10) Gottfried Wilhelm LEIBNIZ. Opera Ommia. Ed. Dutens. Vol. V. Pág. 17.

(11) Isaac TODHUNTER. A History of the Mathematical Theory of Probability. Ed. Chelsea Publishing Co. 1965. Pág. VI del Prefacio.

(12) Thomas BAYES, "An Essay towards solving a problem in the doctrine of chance". Biometrika 1958. Vol. 45. Pág. 297.

(13) I. TODHUNTER. Op. cit. New York 1965. Pág. 193.

(14) G. A. BARNARD, "Thomas Bayes-A Biographical Note". Biometrika 1958. Vol. 45. pp. 293 a 295.

(15) T. Bayes. Op. cit. Biometrika 1958. Vol. 45. Pág. 297.

(16) Dirk J. STRUIK. A Concise History of Mathematics. Ed. Dover Publications INC. New York 1967. Pág. 136.

(17) U. NIETO. Op. cit. Vol. II. Pág. 36.

(18) D. E. SMITH. Op. cit. Vol. I. Pág. 486.

(19) U. NIETO. Op. cit. Pág. 36.

(20) D.J. STRUIK. Op. cit. Pág. 136.

(21) I. TODHUNTER. Op. cit. Pág. 503.

(22) I. TODHUNTER. Op. cit. Pág. 560.

(23) D. E. SMITH. Op. cit. Vol. II. Pág. 530.

(24) U. NIETO. Op. cit. Pág. 37.

(25) I. TODHUNTER. Op. cit. Pág. 464.

C A P I T U L O III

EVOLUCION Y FORMALIZACION DE LAS DISTINTAS TEORIAS SOBRE LA PROBABILIDAD

CAPITULO III: EVOLUCION Y FORMALIZACION DE LAS DISTINTAS TEORIAS SOBRE LA PROBABILIDAD.

3.1.- La teoría clásica de la probabilidad y sus objeciones.

3.2.- Teoría frecuencial.

3.3.- Teoría logicista.

3.4.- Teoría subjetivista.

3.5.- La teoría matemática de la probabilidad.

"Un empirista supone que un enunciado básico verdadero de probabilidad dice algo acerca del mundo inanimado, mientras que un subjetivista considera que dice algo sobre la creencia o grado de confianza de un pensador ideal"

Max Black. _Inducción y probabilidad_

pág. 129.

3.1.- La teoría clásica de la probabilidad y sus objeciones.

La teoría clásica, relacionada con los juegos de azar, tiene un punto de partida clásico: la existencia de una simetría recíproca entre los distintos resultados posibles; simetría que viene a significar que qualquiera de los resultados posibles pueden ser considerados equivalentes desde el punto de vista de la probabilidad.

Así, si suponemos todos los resultados posibles del juego, y estos se consideran igualmente favorables -igualmente verosímiles-, existe una simetría mútua del tipo referido antes; por tanto, para el jugador es indiferente, en este caso, arriesgar su apuesta por cualquiera de los resultados posibles.

La teoría clásica, debido a la falta de conocimiento sobre el experimento aleatorio del cual se derivan los sucesos, trata de valorar únicamente probabilidades "a priori".

El hecho de considerar los sucesos equiprobables, en la teoría clásica, se caracteriza de distintas y variadas formas según los diferentes autores. En la formulación de Laplace, a través del principio de la razón insuficiente -término utilizado por T.L. Fine-, la equiprobabilidad de los sucesos va a venir caracterizada por la no existencia de razón alguna que favorezca más a unos sucesos que a otros. Sin embargo Keynes, utilizando el término Principio de indiferencia o de la razón suficiente, considera los sucesos equiprobables cuando la información que se tiene respecto a ellos, en cuanto a su tendencia a ocurrir o no ocurrir, está equilibrada.

Según Terrence L. Fine, que recoge las dos posiciones anteriores:

> "La esencia de este enfoque es bien el principio de la razón insuficiente (supone las alternativas equiprobables por falta de razones conocidas para el contrario), o el principio de indiferencia (supone las alternativas equiprobables cuando hay un equilibrio de los datos o hechos en favor de cada alternativa)" (1).

Para dejar suficientemente aclarada la aplicación práctica de la teoría clásica vamos a suponer que **N** es el número total de casos posibles igualmente verosímiles y mutuamente excluyentes, y que desde el punto de vista de un jugador los casos posibles se pueden dividir en dos grupos:

- Casos favorables al suceso que interesa al jugador.
- Casos desfavorables a este suceso.

Representaremos por "n" al número de casos favorables y por "N - n" al número de casos desfavorables.

Esto significa, que cualquiera de los casos favorables, lleva implícito el que gane el jugador, y los desfavorables llevan implícito el que el jugador pierda.

Por tanto, si queremos estimar la probabilidad de que gane el jugador, lógicamente, consideraremos esta como el cociente $\frac{n}{N}$, entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.

Esta es la forma razonable que proporcionan los clásicos para valorar cuantitativamente la probabilidad. La dificultad para determinar este cociente estaba en calcular los números "n" y "N" de casos favorables y casos posibles en cualquier juego. Una vez conocidos se escribía $p = \frac{n}{N}$; siendo "p" la probabilidad del suceso, tal que si ocurría dicho suceso el jugador ganaba.

Esta interpretación llevó a la definición clásica de la probabilidad, por la cual: si un suceso puede ocurrir de "N" formas mútuamente excluyentes e igualmente verosímiles, y si "n" de estas "N" son favorables a que ocurra un determinado suceso, la probabilidad de dicho suceso será: $P = n/N$.

Durante mucho tiempo se utilizó esta definición sin hacer de ella un análisis más formal que resultaba necesario, ya que, además, la consideración de los casos favorables y posibles fuera del campo de los juegos de azar quedaba sin resolver. Fué Pierre Simon Laplace quien amplió el campo de aplicación de esta teoría de los juegos de azar, como hemos podido observar en el análisis de un extenso y variado trabajo en el capítulo precedente. Esta opinión no es compartida sin embargo por Max Black, que opina que:

> "La noción fundamental de derivar igualdades de probabilidades a partir de la paridad de razones favorables tiene, por lo menos, un siglo más, habiendo sido formulada por Jacob Bernoulli en su Ars Conjectandi (1713), publicada póstumamente" (2).

Pero, continuando con Pierre Simon Laplace, debemos decir que en su obra Théorie Analytique des Probabilités -obra fundamental en la historia de la teoría de la probabilidad, como hemos venido viendo- comete el error de considerar la definición clásica aplicable a todos los casos, es decir, que todas las aplicaciones que hace son comparables a un juego de azar en el que todos los sucesos posibles elementales son mútuamente simétricos, en el sentido de igualmente verosímiles que antes explicabamos.

Otro inconveniente de esta definición se plantea para el caso de que el número total de resultados posibles sea infinito. Este problema es resuelto por Alexander Mc Farlane Mood y Franklin A. Graybill para un caso particular, con una solución que puede servir para situaciones similares. Así, Mood y Graybill proponen que:

> "Podría buscarse, por ejemplo, la probabilidad de que un número natural extraido al azar sea par. La respuesta intuitiva a esta cuestión es 1/2. Si hubiera de justificarse este resultado basándose en la definición, podría razonarse del siguiente modo: supongamos que sólo se consideran los veinte primeros números naturales; como diez de estos son pares, la razón de sucesos favorables al total de los posibles es 10/20 ó 1/2. Si consideramos los 200 primeros, 100 de estos son pares y la razón es también 1/2. En general los 2N primeros números naturales continenen N números pares; si formamos la razón N/2N y hacemos tender N a infinito, de modo que comprenda todo el conjunto de los números naturales, la razón sigue tendiendo a 1/2" (3).

Volviendo a la obra de Laplace, Théorie Analytique des probabilités, que fué publicada en 1812, es importante resaltar que después de su publicación siguió un periodo de estancamiento de la parte matemática de esta materia. A pesar de esta aparente pérdida de contacto con el análisis matemático, la teoría de la probabilidad tuvo un gran auge durante el siglo XIX, lo que motivó que ese contacto se fuera recuperando por la necesidad de examinar de una manera crítica y formal la teoría clásica de la probabilidad, con el fin de construírla sobre una base más notable y sólida.

Sobre la teoría de Laplace también se manifiesta Boudot cuando afirma:

> "La teoría de Laplace no está más axiomatizada que cualquier otro desarrollo que date de la misma época. De todas formas, ocurre que no lleva a ninguna contradicción en tanto que no plantea sino problemas estrictamente matemáticos y se le puede dar una forma que satisface las exigencias del rigor matemático contemporáneo. La axiomatización del cálculo de probabilidades propuesta por Kolmogorov no es más que una traducción a un lenguaje riguroso de los principios sobre los que Laplace fundaba la teoría matemática de las probabilidades; de ahí el nombre de teoría neoclásica que se le atribuye a menudo. Pero las dificultades surgen cuando se trata de aplicar la teoría de Laplace. Estas dificultades conciernen a la determinación de los datos numéricos de la probabilidad, la interpretación empírica y la verificación de los enunciados de probabilidad. Parece que resultan de una definición insuficiente de probabilidad" (4).

De acuerdo entonces con los comentarios hasta aquí hechos, surgen nuevas tendencias para sustituir la definición clásica de probabilidad por otra con más rigor lógico. En esta línea se manifiesta Cramér cuando afirma:

> "El primer intento de vencer las dificultades consistió en analizar el concepto de simetría o de casos igualmente posibles usado en la defini-

> ción clásica, e intentar mejorar esta definición incluyendo algún criterio apropiado que fuese aplicable a dicho concepto. Entre los autores cuya obra sigue esta orientación cabe mencionar particularmente a Bertrand y Poincaré. Sin embargo, otros autores mantuvieron firmemente la opinión de que en muchas de las más importantes aplicaciones es difícil o imposible formase idea concreta alguna acerca de la naturaleza de la división de cierto número de casos igualmente posibles requerida por la definición clásica" (5).

Hasta tal punto es limitada la definición clásica que basta con que el tipo de problema más sencillo, por ejemplo el lanzamiento de una moneda en el que el lanzamiento esté sesgado a favor de una de las caras para que no podamos aplicar la definición de probabilidad que estamos tratando, ya que en ese caso no sería posible admitir el postulado de indiferencia.

Para casos similares a este, en los que no pudieran considerarse los sucesos elementales igualmente posibles, tendríamos que ampliar la definición. Esta nueva orientación busca la definición de probabilidad basándose en una serie de observaciones del suceso, esto es en la estabilidad de las frecuencias relativas, tema ya tratado por James Bernoulli tal y como se dejó referido en el capítulo segundo; mientras que la definición anterior quedará relegada a aquellos casos en los que puedan considerarse los sucesos elementales igualmente verosímiles.

Por las razones expuestas pasamos a estudiar, por tanto, la teoría frecuencial basada precisamente en la observación de las frecuencias relativas.

3.2.- <u>Teoría frecuencial.</u>

La teoría frecuencial considera la probabilidad como una frecuencia relativa ideal, esto es, como el límite de la sucesión de frecuencias relativas de un suceso al aumentar indefinidamente el número de realizaciones. Este enfoque empírico es fundamental a la hora de determinar la probabilidad en diversas situaciones en las que contamos con la información de un número determinado de ocurrencias del suceso. Así, Max Black, de acuerdo con lo anterior, comenta:

> "Todos los teóricos de la probabilidad coinciden con el planteamiento del sentido común en reconocer que el conocimiento de las frecuencias relativas de ocurrencias influye convenientemente, a veces, en los juicios de probabilidad. De no ser así, las agencias de encuestas no merecerían más crédito que los adivinos y su interés por la información estadística sería un desatino inútil (...).
>
> Una moneda sin trucar puede, en ausencia de más información instar a la aplicación del principio de indiferencia, pero cuando ensayos reiterados con la misma moneda muestran que las caras predominan acusamente sobre las cruces, la evidencia deja de ser simétrica" (6).

En el conjunto de observaciones empíricas recogidas de los juegos de azar se manifestó la regularidad de los sucesos que se presentaban, y este hecho fué fundamental para el desarrollo de la teoría de la probabilidad. Cramér piensa sobre este tema de la regularidad lo siguiente:

> "A pesar del comportamiento irregular de los resultados individuales, los resultados medios de las sucesiones de los experimentos aleatorios muestran una fuerte regularidad" (7).

En efecto, si lanzamos una moneda al aire un gran número de veces, observamos que las caras y las cruces se presentarán aproximadamente el mismo número de veces, si la moneda no está sesgada en una de las caras, es decir, el número de caras y el número de cruces será aproximadamente 1/2 del total de tiradas.

Si repetimos un determinado experimento aleatorio "n" veces en las mismas condiciones y ocurre "f" veces el suceso "S", al número "f" será la frecuencia absoluta del suceso, y el cociente f/n determinará la frecuencia relativa.

Ahora bien, si "n" es un número suficientemente grande y admitimos el principio de regularidad, cuando obtenemos una larga serie de frecuencias relativas repitiendo el experimento en las mismas condiciones un gran número de veces, el término general de éstas es aproximadamente igual a la probabilidad del suceso o bien, la probabilidad del suceso es el límite de esa sucesión de frecuencias relativas.

Este principio ya se utilizaba en la época del caballero De Méré como algo evidente, aunque no se formuló de forma explícita hasta una fase posterior de la teoría de la probabilidad. Fué James Bernoulli quien formula el famoso teorema que lleva su nombre en su ya citada obra Ars Conjectandi, publicada en 1713, y sobre la que Cramér comenta:

> "En esta obra encontramos, entre otras cosas, la importante proposición conocida como teorema de Bernoulli, mediante el cual la teoría de la probabilidad fué elevada por vez primera del nivel elemental de conjunto de soluciones de problemas particulares a un resultado de importancia general" (8).

Dicho teorema, como es bien conocido, establece que: Dada una cantidad, ε, positiva y suficientemente pequeña, la probabilidad de que el término general de la sucesión de frecuencias f/n de un suceso aleatorio difiera en valor absoluto de la probabilidad de dicho suceso, p, una cantidad mayor que ε, tiende a cero cuando $n \to \infty$. Esto sería, abreviadamente:

$$P\left(|f/n - p| > \varepsilon \right) \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Se omite la demostración de este teorema puesto que aquí se trata solamente de dar una visión global del tema y de las distintas concepciones para la determinación de la probabilidad.

La obra de John Venn, The logic of chance, publicada por primera vez en Londres, en 1866, es uno de los primeros trabajos de la teoría frecuencialista. En ella, Venn define la probabilidad en términos de frecuencia relativa de ocurrencia de un suceso a largo plazo. Pero, otra interpretación distinta a la del autor inglés es ofrecida por la obra de Max Black cuando expone:

> "C. S. Peirce consideró que la probabilidad correspondía a las argumentaciones más que a los sucesos; y por tanto, la medida importante era el número proporcional de veces que la argumentación conducía de premisas verdaderas a conclusiones verdaderas, y se ha de establecer mediante la investigación empírica de los éxitos de la argumentación a la larga" (9)

La definición frecuencial de la probabilidad está limitada a los casos en los que el experimento aleatorio es repetible en las mismas condiciones. El esquema objetivista de la definición frecuencial hace que dicha definición tenga ventajas claras cuando se pueda hacer uso de ella, y estamos de acuerdo con el profesor Ubaldo Nieto de Alba cuando expone las razones por las que esta teoría ha encontrado tantos partidarios:

> "Las principales razones por las cuales esta interpretación ha encontrado muchos adeptos son:
> 1) Que esta teoría da a la probabilidad un sentido análogo al de proporción, lo cual es muy corriente en la vida ordinaria.

2) Que con esta interpretación es más fácil el contraste de los modelos matemáticos y del cálculo de probabilidades como rama específica de la matemática" (10).

Los más importantes seguidores de esta teoría han sido: John Venn -quien, según Nieto de Alba, fué el primero en formularla-, Von Mises, del que hablaremos más extensamente en adelante, Cramér, Fisher, Neyman, Pearson, ...

En cuanto a los orígenes de esta teoría, Max Black los sitúa en John Locke, filósofo inglés (1632-1704), cuando habla del argumento probable en su obra Essay Concerning Human understanding; y más tarde, también según Black, en Leslie Ellis, autor en el que es posible encontrar indicios de teoría frecuencial cuando se refiere a la teoría de la probabilidad como "una ciencia relativa a las cosas tal como realmente existen" o cuando afirma que "todo posible evento tiende a recurrir en una razón definida de frecuencias".

Más tarde, y moviéndonos ya en el terreno de lo cercano y comprobable, es John Venn, filósofo e historiador inglés (1834-1923), quien en sus trabajos e investigaciones sobre lógica, y sobre todo en su obra The logic of chance, se convierte en el autor fundamental de la teoría frecuencial del siglo pasado.

Ya en nuestro siglo, el más importante defensor de esta teoría ha sido Richard Von Mises, matemático e ingeniero alemán (1883-1953). Von Mises fué profesor en las universidades de Estrasburgo, Berlín y Estambul, y hasta la subida de los nazis al poder en Alemania, fué director del Instituto de Matemática Aplicada de la Universidad de Berlín, trasladándose más tarde por motivos políticos a los Estados Unidos.

Karl R. Popper afirma de este autor:

> "La primera teoría frecuencial que proporciona unos fundamentos para todos los teoremas principales del cálculo de probabilidades fué propuesta por Richard Von Mises" (11).

Uno de los conceptos claves en la teoría de Von Mises es el concepto de "colectivo", que este autor considera como una serie de sucesos que verifican el axioma de convergencia y el axioma de aleatoriedad. Este axioma de aleatoriedad que postula Von Mises no admite ningún sistema de jugar por el que el jugador pueda mejorar sus posibilidades de ganar; y si hubiera un sistema de juego, éste podría dar resultados a corto plazo, pero nunca a largo plazo. En definitiva, no admite que haya regularidades dentro de la sucesión de tiradas de una moneda, por ejemplo, por la que se pudieran hacer predicciones; es decir, por la que pudieramos encontrar un sistema válido de juego. En resumen, la teoría de Von Mises se basa en el concepto de colectivos irregulares.

En cuanto al axioma de convergencia establece que la sucesión de frecuencias relativas tiende a un límite cuando aumenta la sucesión de sucesos.

Estos dos axiomas han sido muy criticados sobre todo por el hecho de que Von Mises basa su teoría en la combinación de los dos, ya que no es lógico obtener un límite de una sucesión que no tiene ninguna regla.

Una de las soluciones propuestas para resolver este conflicto es la de formular sólo el axioma de convergencia y prescindir del de aleatoriedad, o bien, tal como lo hace Reichenbach, utilizando otro axioma de aleatoriedad más débil; Reichenbach acepta para ello series regulares.

Ante esto Karl Popper piensa también que el problema se plantea por la combinación de los dos axiomas y propone el perfeccionamiento del axioma de aleatoriedad y la eliminación del axioma de convergencia. El axioma de aleatoriedad modificado, como lo llama Popper, sólo tendría las condiciones indispensables para poder deducir con él el teorema de Bernoulli y los demás teoremas de convergencia de la teoría de la probabilidad.

La gran dificultad de la teoría frecuencial está en la asignación de la probabilidad a sucesos particulares ya que se interpreta que la probabilidad corresponde globalmente a una serie de sucesos indefinida. En este sentido Max Black manifiesta:

> "El hecho de que nunca se han de hallar en la experiencia series de tal tipo, hace de los enunciados de probabilidad, según esta interpretación, algo que ni es estrictamente verificable, ni estrictamente falsable. Esta limitación y la necesaria exclusión de los enunciados de probabilidad referente a eventos singulares contribuyen a restringir el alcance de la probabilidad, así interpretada demasiado drásticamente por simple comodidad (...). A pesar de los valientes intentos de Reichenbach para superar este defecto, puede decirse que la interpretación frecuencial refleja, en el mejor de los casos, sólo una parte de la verdad sobre la probabilidad" (12).

Uno de los seguidores de Von Mises que trató de dar una coherencia a la teoría de éste fué Copeland, que comenzó por limitar la condición de irregularidad. Muchos otros continuadores de la teoría estaban de acuerdo con el método de Copeland, entre ellos Reichenbach que trabajó en la misma línea que él. Boudot se pronuncia también en este sentido:

> "Todo el problema es limitar el debilitamiento de la condición de irregularidad al mínimo necesario para que se pueda establecer la consistencia de la teoría, a fin de conservar, si es posible, todos los resultados de la teoría clásica. Si se quiere salvar la teoría frecuencial de la probabilidad no hay más que un procedimiento: hacer coherente la definición de Von Mises restringiendo la condición de irregularidad que es, de modo manifiesto, demasiado fuerte. Es lo que han hecho sus discípulos" (13).

A. Wald, como partidario de esta teoría, proporciona unos resultados más fuertes que los de Copeland, estudiando de forma general y combinada como constituir una teoría del colectivo coherente con los límites que ésta tiene. Por el contrario, Reichenbach está más en la línea de Copeland que en la de Wald.

Otro de los discípulos de Von Mises es J. Ville quien plantea objetivos similares a los de Wald: la posibilidad de la teoría del colectivo y sus límites. Uno de los aciertos más importantes de este autor consiste en tomar como colectivos, es decir como series irregulares, algunos que la teoría clásica no considera aleatorios. Los resultados obtenidos por J. Ville sobre este tema son el principio del fin de esta teoría.

3.3.- Teoría logicista.

La interpretación logicista de la probabilidad está basada en la relación lógica que existe entre dos proposiciones: hipótesis y evidencia. Según esta interpretación, el proceso consiste en asignar la probabilidad a una hipótesis en la medida que ésta se ve avalada por la experiencia o evidencia. Estos términos, evidencia y experiencia, serán utilizados indistintamente a lo largo de nuestra disertación. Respecto a la teoría logicista, Max Black afirma:

> "Las teorías lógicas descienden directamente del punto de vista clásico de Bernoulli y Laplace (...). Laplace y sus seguidores (...) concebían (...) el grado de probabilidad como totalmente determinado por una relación calculable entre la información dada (o la carencia de ella) y una hipótesis dada, independientemente de que se apelará a frecuencias asociadas o a cualquiera otras materias de hecho" (14)

Uno de los autores fundamentales de esta teoría es el ya citado Reinchenbach, que aunque comienza utilizando la definición clásica de la teoría frecuencial, se propone según palabras de M. Boudot:

> "Por una parte, ampliar el campo de aplicación del concepto de probabilidad y evitar ciertas dificultades, suprimiendo los requisitos relativos

> a la irregularidad de las series. Por otra parte, intenta mostrar que el concepto de probabilidad es una noción lógica que va ligada a la introducción de un nuevo conector del cálculo de proposiciones y autorizar así la construcción de una lógica inductiva. Este último resultado se alcanza bastante fácilmente. Desde Boole se sabe que es posible en la teoría de las probabilidades; sustituir los sucesos por proposiciones que afirman que esos sucesos se han producido o se producirán. Esta transformación constituye la etapa esencial en la constitución de una teoría lógica de probabilidad" (15).

Hans Reinchenbach, filósofo y matemático alemán, residente en los Estados Unidos, es el autor de la más clara formulación lógica del concepto de probabilidad aunque esta definición introduce una terminología problemática y excesivamente rigurosa. Uno de los trabajos más importantes sobre teoría de la probabilidad de este autor es Theory of Probability,, publicado por primera vez en 1934 en alemán. En esta obra, Reichenbach se basa en la teoría frecuencial de la probabilidadd, mediante el conocimiento experimental y el uso de la regla de inducción; esto le va a llevar a una lógica inductiva mediante la cual va a ser posible determinar la hipótesis más probable.

Además de este autor, son representantes importante de las teorías lógicas en nuestro siglo, John Maynard Keynes, Rudolf Carnap, Harold Jeffreys y B. Koopman, autores que iremos conociendo a lo largo de la exposición.

En general, esta teoría plantea la necesidad de una persona idealmente racional que enjuicia, desde la más absoluta imparcialidad, la fuerza de la evidencia haciéndola equivaler a un determinado grado de probabilidad. Esta fuerza de la evidencia, o grado de probabilidad, se determina por la relación lógica que existe entre la hipótesis planteada y el grado en que la experiencia es compatible con ella. Para establecer esta relación, y por tanto para estimar las probabilidades, es necesario observar unas reglas de racionalidad.

Por lo que acabamos de ver, es difícil valorar las probabilidades porque en el proceso habría siempre una parte de arbitrariedad, aquella que se deje a la intuición del individuo. A pesar de esta dificultad que evidentemente presenta esta teoría, los autores citados hacen un intento de axiomatización.

Entre los defensores del logicismo se pueden distinguir distintos modos de formalizar la teoría. De un lado, aparece la llamada <u>probabilidad lógica comparativa</u>, o <u>probabilidad ordinal</u>, formulada por Koopman, que establece:

$$(H_1 / E_1) \precsim (H_2 / E_2)$$

Esto es, la hipótesis H_1 condicionada por la experiencia E_1 <u>no es más</u> probable que la hipótesis H_2 condicionada por la experiencia E_2 , supuesto que la ordenación $\precsim$ la establece una persona guiada por su intuición y racionalidad.

Esta relación definida de esta manera por Koopman verifica un conjunto de axiomas, de los que T. L. Fine nos dice:

> "En los axiomas de Koopman hay un paralelismo entre la probabilidad comparativa condicional de las hipótesis sobre la experiencia y los axiomas de la probabilidad comparativa condicional de sucesos" (16).

Según Koopman, a esta relación comparativa $\precsim$ se le puede asignar una probabilidad cuantitativa para H/E verificándose entonces la implicación:

$$H_1 / E_1 \precsim H_2 / E_2 \Rightarrow P(H_1 / E_1) \leq P(H_2 / E_2)$$

donde la implicación inversa no se cumple necesariamente.

Por otro lado, es necesario considerar la teoría de la probabilidad lógica de Carnap. Rudolf Carnap, filósofo alemán nacido en 1891, fué profesor en las universidades de Viena y Praga, y a partir de 1936 en la Universidad de Chicago. Entre sus obras conviene destacar <u>Fundamentos de la lógica simbólica</u> (1929), <u>Fundamentos de la lógica y la matemática</u> (1939) y <u>Fundamentos lógicos de la probabilidad</u>, publicada esta última en 1950.

Carnap establece en estas obras, y fundamentalmente en la última citada, la relación cuantitativa C (H , E) entre hipótesis y experiencia, llamada probabilidad lógica cuantitativa o grado de confirmación, siendo C (H, E) el grado en que H (hipótesis) está confirmada por E (experiencia). Carnap llama a esta función C función de confirmación, y ésta ha de verificar los axiomas relativos a la coherencia, invarianza y al modo de utilizar la experiencia. El término invarianza viene a significar que la relación entre H y E sólo depende de lo que se diga en ellas y de los sujetos a los que hace referencia. Sobre su teotía de la lógica inductiva y sobre la forma de llegar a ella, el propio Carnap matiza:

> "Yo entiendo por lógica inductiva una teoría de la probabilidad lógica que proporciona reglas para el conocimiento inductivo. Probaré a explicar la naturaleza y propósito de la lógica inductiva mostrando como puede usarse para determinar decisiones racionales. (...)
>
> Debemos entender la probabilidad en este contexto, no en el sentido objetivo, sino en el sentido subjetivo, esto es, como el grado de creencia. Esto es un concepto sicológico en la teoría de la decisión empírica referido a las creencias reales del ser humano real (...) introduciendo algunas condiciones de racionalidad. Hasta el punto que estaré de acuerdo con los representantes de la teoría subjetiva de la probabilidad. Después haré una nueva etapa, llamada la transición del concepto casi-sicológico al lógico. Esta transición conducirá a la teoría que yo llamo <u>lógica inductiva</u>" (17).

La lógica inductiva es esencialmente la lógica de la incertidumbre, la misma incertidumbre que conduce a la teoría de la decisión. Un argumento inductivo consiste en una serie de proposiciones, tomadas como premisas, y una o más nuevas proposiciones tomadas como conclusiones. Las premisas constituyen la evidencia o experiencia y las conclusiones constituyen la hipótesis. La inducción es una inferencia no demostrativa que conduce a una conclusión referida a alguno o todos los elementos de una clase, basada en la evidencia de estos elementos. En este proceso, la confianza que tenemos en la hipótesis depende de la evidencia a la que esté asociada. En este sentido Max Black sostiene:

> "Los abogados de moda de las teorías lógicas tipicamente interpretan la probabilidad como relativa a la evidencia, en realidad, el slogan *la probabilidad varía con la evidencia* se considera comunmente, por parte de ellos, como autoevidente" (18).

Ahora bien, el tema de la inducción, y de la lógica inductiva, es un tema que siempre ha estado presente en la historia de la matemática. George Henrik von Wright afirma en este sentido que fué el propio Aristóteles quien hizo el primer intento de un tratamiento sistemático de la inducción, resumiendo así las contribuciones del filósofo griego:

> "Aristóteles fué el primero que indicó el carácter no demostrativo del tipo de inferencia que tratamos bajo el nombre de inducción (...).Aristóteles era consciente del doble aspecto del método inductivo como un proceso de inferencia y un proceso de definición (formación de conceptos)" (19).

Aristóteles define la inducción como un paso de lo particular a lo universal. Pero la lógica inductiva moderna tiene su verdadero fundador en Francis Bacon, filósofo inglés que vivió entre 1561 y 1626. En su obra Novum Organum, publicada en 1620, se propone mejorar el "Organum" de Aristóteles, y en ella indica que el razonamiento inductivo es el método que debe utilizarse en la investigación de las ciencias y de las artes. A pesar de sus detractores, no podemos olvidar la importancia de este autor en la historia de la ciencia moderna y a él debemos el tratamiento de la estructura lógica de las leyes, mérito que Von Wright tilda de "inmortal".

Por no desviarnos excesivamente del tema que estamos abordando obviaremos el largo recorrido de la lógica inductiva en la historia de la ciencia moderna, y sólo citaremos a modo de ejemplo algunos hitos como el marcado por David Hume (1711-1776), filósofo escocés, que con su obra Enquiry Concerning Human Undestanding, publicada en 1748, se convierte en el más representativo autor logicista del siglo XVIII, revolucionando la historia de la inducción en ese siglo.

Ya en el XIX podemos citar a John Stuart Mill (1806-1873). El filósofo y economista inglés escribe en 1843 su Sistema de Lógica, que se convierte en el principal tratado de este siglo en el que se exponen la teoría y los métodos de inducción.

En el siglo XX, el interés por la lógica inductiva vuelve a resurgir con John Maynard Keynes (1883-1946), suficientemente conocido por sus doctrinas económicas, que escribe en 1921 su obra fundamental sobre probabilidad A Treatise on Probability donde desarrolla, por primera vez y con anterioridad a Carnap, una sistematización del concepto de probabilidad lógica.

Otros autores de imprescindible cita en la teoría lógica de la probabilidad en nuestro siglo son: Ramsey con sus obras Truth and Probability (1926) y Further Considerations (1928); Harold Jeffreys con su obra Theory of Probability (1939); el ya citado Henrik von Wright con A Treatise on Induction and Probability (1951) y más recientemente el trabajo de Henry E. Kyburg Probability and Inductive Logic, de 1970, del que tendremos ocasión de hablar más extensamente en los capítulos posteriores dedicados a la teoría subjetiva de la probabilidad.

Todos estos autores están de acuerdo en que existe una relación de fuerzas entre la evidencia -las premisas que antes citábamos- y la hipótesis -conclusión- de un argumento inductivo, relación que puede crecer con la acumulación de la experiencia adecuada, la cual debe ser medida.

Así estos autores consideran que la relación C entre la hipótesis, H , y la experiencia, E , a la que se podría asignar un número (una probabilidad), varía entre 0 y 1

$$0 \leq C\ (H\ ,\ E) \leq 1$$

y expresa el grado de creencia racional, independiente de los juicios y caprichos personales. Así se constituye una relación puramente lógica que Carnap llama grado de confirmación y que resulta de la función de confirmación C.

Sobre este mismo tema es también conveniente tener en cuenta lo que Richard Mattessich propone al respecto:

> "Debemos distinguir entre la probabilidad a priori de la evidencia C(e) y la probabilidad condicionada a posteriori de la hipótesis dada la evidencia C(h, e), y la probabilidad conjunta de hipotesis y evidencia C(h . e); entonces la relación entre esta teoría y el teorema de Bayes podría ser expresada como sigue:
>
> $$C(h\ ,\ e) = \frac{C\ (h\ .\ e)}{C\ (e)}$$ " (20).

Una vez realizado este pequeño recorrido por las aportaciones de algunos autores a la teoría logicista de la probabilidad, conviene matizar algunos de los conceptos manejados asiduamente en este epígrafe.

- El grado de confirmación se identifica en la actualidad con la interpretación lógica de la probabilidad.
- La interpretación lógica de la probabilidad está íntimamente relacionada con la lógica inductiva.
- Este concepto logicista pretende ser puramente lógico, expresa el grado de creencia en una hipótesis por un individuo puramente racional, sobre la base de una experiencia dada.

Para concluir este epígrafe, debemos señalar que la diferencia entre probabilidad lógica y probabilidad subjetiva -tema éste que estudiaremos en el epígrafe siguiente- radica esencialmente en que la probabilidad lógica expresa -como decíamos arriba- grado de creencia racional y objetivo, mientras que la probabilidad subjetiva expresa el grado de creencia real de una persona determinada, en la que influye su subjetividad y su intuición personal.

Sin embargo, a pesar de los esfuerzos logicistas por conseguir establecer de modo objetivo la probabilidad, el grado de confirmación sigue teniendo problemas de objetividad y medibilidad. Estos problemas no han sido resueltos para lograr que esta noción de probabilidad sea aplicable a las ciencias empíricas y a los procesos de elaboración de decisiones. Las teorías subjetivistas, que estudiaremos a partir de ahora, al estar basadas en el grado de creencia real serán más aplicables en el estudio de los procesos reales de decisión.

3.4.- Teoría subjetivista.

Tal como indica el propio título de esta tesis doctoral, el estudio de la concepción subjetivista de la probabilidad es el punto básico sobre el que girará este trabajo. Ahora bien, para mantener cierto orden sistemático en nuestra exposición, abordaremos en este epígrafe el estudio general de esta interpretación, tal y como hemos hecho para las demás interpretaciones y teorías, para más adelante en los capítulos que siguen, desarrollar, de forma más exhaustiva y sistemática, la teoría subjetivista de la probabilidad.

El concepto de probabilidad subjetiva, llamada también personal por algunos autores, abandona el criterio del grado de confirmación como grado de creencia objetivo y racional, expresando, por contra, el grado de confirmación como grado de creencia real de una persona, tal y como lo manifestaría en una apuesta de juego.

Para fijar de una forma clara las interpretaciones estudiadas hasta ahora utilizaremos una cita de Mattessich:

> "La probabilidad es un concepto empírico objetivo (como frecuecia relativa) o un concepto lógico objetivo (como grado de creencia racional) o un concepto empírico subjetivo (como grado de creencia real) etc... Parte de la discusión se resuelve por el hecho de que exista una teoría de la proba-

> bilidad general y puramente matemática, cuyos axiomas se supone que son válidos para las distintas interpretaciones del concepto de probabilidad" (21).

Suele usarse también para interpretar la probabilidad en un sentido subjetivista la expresión grado de confianza que se tendría en una hipótesis o proposición H dada la evidencia E. Otros autores prefieren, sin embargo, utilizar simplemente la expresión grado de creencia.

Para explicar la frontera entre los términos objetivo y subjetivo, que va a determinar cada una de las interpretaciones de la probabilidad que estamos estudiando, K. Popper citando a Kant sostiene:

> "Si algo es válido para quien quiera que esté en uso de razón, entonces su fundamento es objetivo y suficiente. Kant aplica la palabra subjetivo a nuestros sentimientos de convicción (de mayor o menor grado). El exámen de como aparecen éstos es asunto de la sicología: pueden surgir, por ejemplo, según las leyes de la asociación; también pueden servir razones objetivas como causas subjetivas del juzgar, desde el momento que reflexionamos sobre ellas y nos convencemos de su congruencia" (22)

El grado de creencia que mide la probabilidad se podrá establecer indirectamente por la apuesta sobre la ocurrencia del suceso. Esta probabilidad procede directamente de la intuición y, según Koopman, "es la experiencia la que se interpreta en términos de probabilidad, y no la probabilidad la que se interpreta en términos de experiencia" (23).

Una de las notaciones que parece más interesante para representar la probabilidad subjetiva es C_S (H / E) que como vemos es similar a la de la probabilidad lógica: grado de creencia de la hipótesis H , dada la evidencia E , con la variante substancial y fundamental de que escribimos C_S , es decir grado de crencia o grado de confianza, según la interpretación subjetiva, donde S es el sujeto que reflexiona acerca de H , por tanto leeríamos grado de confianza de S en H dado E .

Hay discrepancias en cuanto a que se identifique la probabilidad con C_S directamente. La propuesta de dos de los más representativos subjetivistas contemporáneos, Leonard J. Savage y Bruno De Finetti, consiste en proponer al sujeto S que asigne grados de creencia C_S (H / E) para distintos valores de H y E . Si algunas de estas asignaciones son incoherentes, tratará de rectificar sus grados de creencia hasta eliminar las incoherencias, y a estas nuevas asignaciones se les llama grados de creencia rectificados. Savage cree que existe una función de probabilidad personal para cada individuo, es decir Savage y De Finetti conscientes de que el mayor problema de este concepto y su medida está en el sesgo personal y en la inestabilidad con la que algunas de estas probabilidades están en la mente de una persona, recomiendan que el concepto de probabilida subjetiva no sea tanto una guía directa para funcionar sino principalmente como una inspección sobre la consistencia de las asignaciones.

La coherencia significa que el mismo sujeto S ante dos hipótesis lógicamente equivalentes dadas las experiencias para ambas, lógicamente equivalentes también, asignará grados de creencia iguales.

En cuanto a la rectificación de los valores del grado de creencia nos diche Max Black:

> "Demos a la rectificación de los valores de la confianza de S el siguiente significado: S eligirá tales valores que será imposible a toda persona apostar contra él aceptando diferencias que garantizan ganancias líquidas (...). Si el sistema de los valores de confianza de S es coherente (...) dichos valores obedecerán las reglas de adición y de multiplicación de la teoría matemática de azares. Este chocante resultado permite al subjetivista acceder a los axiomas matemáticos usuales y sus consecuencias (...). Todos los sistemas de valores de confianza rectificados usarán los mismos cálculos para derivar probabilidades complejas a partir de otras simples por diferentes que sean sus puntos de partida" (24).

Los fundamentos de esta teoría con un desarrollo sistemático fueron establecidos por Ramsey y más tarde ampliados por De Finetti. Pero, fundamentalmente, cuando el concepto tuvo más amplia aceptación y aplicación fué después de la publicación del trabajo de L. J. Savage The Foundations of Statistics en abril de 1954. Savage mantiene en esta obra que:

> "Para los personalistas la probabilidad mide la confianza que un individuo particular tiene en la verdad de una proposición particular (...) y no niegan la posibilidad de que dos personas razonables ante la misma evidencia tengan grados de confianza distintos en la verdad de la misma proposición" (25).

El libro de Savage está basado en el punto de vista personalista deducido principalmente del trabajo de Bruno De Finetti: "La previsión: sus leyes lógicas, sus fuentes subjetivas", publicado por el Instituto Henri Poincaré en 1937.

Posteriormente, el enlace entre probabilidad subjetiva y utilidad, originalmente descubierto por Ramsey, y después desarrollado por Neuman y Morgenstern, es esencial para entender esta interpretación de la probabilidad. Es esta relación probabilidad subjetiva-utilidad la que hace que sea más fácil medir esta probabilidad que la probabilidad lógica. Por esto no es sorprendente que este concepto haya tenido tanta aceptación y aplicación práctica en las últimas dos décadas, sobre todo en las ciencias administrativas.

Respecto a esta relación entre probabilidad subjetiva y utilidad ya se insistió de manera especial en el capítulo I y volveremos sobre ella en el capítulo siguiente. Por el momento dejamos este asunto pendiente, ya que este epígrafe sólo trata de dar ideas globales y básicas de esta interpretación de la probabilidad.

Teniendo en cuenta que el objeto de esta tesis es la utilización de la probabilidad subjetiva en la toma de decisiones, esto está justificado porque la interpretación clásica, lógica y frecuencial no son adecuadas para ello.

Fine comenta sobre este punto:

> "Las interpretaciones de la probabilidad como frecuencia relativa, clásica y lógica están principalmente relacionadas con el conocimiento y la inferencia. Ninguna de estas interpretaciones conduce por ellas mismas a una justificación adecuada para el uso de la probabilidad para guiar el comportamiento o facilitar la elaboración de decisiones. Ni son éstas interpretaciones suficientes para dirigir el uso de la probabilidad en la elaboración de decisiones; requieren un complemento general mediante principios estadísticos adecuados" (26).

El desarrollo de la teoría de la decisión requiere que los decisores expresen sus probabilidades específicas y preferencias. Estos datos de comportamiento se van incluyendo en un modelo de decisión que con el proceso adecuado facilita la acción. Sea cual sea el resultado de la discusión general no afectará a la utilidad de las probabilidades subjetivas y preferencias marcadas. Si estas evaluaciones son eliminadas por las decisiones últimas, bien por procesos analíticos o por decisiones reales, se puede recurrir a combinar las aproximaciones subjetiva y frecuencial.

Cuando en próximos capítulos hablemos de la teoría de la probabilidad subjetiva volveremos sobre este punto de la toma de decisiones. De momento volvemos a los autores de la teoría subjetivista, sobre lo que dicen, sus influencias, trabajos etc.

Recordemos que los fundamentos de la teoría subjetivista los encontramos en F. P. Ramsey con sus obras The foundation of mathematics, publicada póstumamente en 1931 y "Truth and Probability" trabajo esencial para la teoría subjetivista, que se encuentra en The foundations of mathematics and other logical essays, publicada en 1931 y donde el autor desarrolla en profundidad su criterio personalista de probabilidad y utilidad.

De L. J. Savage podemos decir que procede de Ramsey y que su punto de vista personalista tiene origen en Bruno de

Finetti. Este último llega a la teoría subjetivista por su temprana afición a la filosofía empirista de los pensadores del liberalismo anglosajón. Como él mismo comenta:

> "Estoy convencido de que mis ideas básicas proceden de los años de la High School como resultado de mi preferencia por los filósofos británicos: Locke, Berkeley y sobre todo de Hume (...) Yo creo que mi trabajo basado en la intercambiabilidad corresponde a las ideas de Hume" (27).

Pero las teorías subjetivistas de De Finetti tienen influencias también de las ideas Keynesianas, a través de la obra <u>A treatise on probability,</u> publicada por Keynes en 1921. La idea sugerida por Ramsey, en su obra póstuma antes comentada, de que el grado de confianza se asigne a partir de la ventaja que una persona da frente a otra es recogida también por el autor italiano.

Otros autores con ideas similares son Harold Jeffreys con su obra <u>Theory of Probability</u> (1948); B. O. Koopman con sus trabajos "Intuitive probabilities and sequences" y "The axioms and algebra of intuitive probability" e Irving John Good con su trabajo "Probability and the weighing of Evidence", publicada en 1950.

Otros autores que también interesa mencionar son: Rudol Carnap, autor del cual De Finetti le supone una interpretación subjetivista, pero que a nuestro entender en él se solapa también el esquema logicista; y George Pólya que disiente en el tema del argumento probable en el sentido de la probabilidad subjetiva. Merece también atención especial Dennis V. Lindey que, aunque en principio se decanta por la teoría objetivista, pronto descubre las inconsistencias de esta teoría optando por la teoría subjetivista, a la que encuentra más clara "tanto práctica como teóricamente". las obras más importantes de este autor, desde el punto de vista que a nosotros nos interesa, esto es desde la óptica subjetivista son: Introduction to probability and statistics, publicada en 1965 en dos volúmenes y en la que el autor adopta un punto de vista bayesiano; y Statistical Inference, anterior a aquella y publicada por primera vez en 1953.

Lindley y De Finetti mantuvieron importantes contactos, pero sin lugar a dudas una de las relaciones más fructíferas entre dos subjetivistas es la mantenida entre De Finetti y Savage, relación tan útil como intensa. Ambos autores realizan varios trabajos al alimón, entre ellos On the Manner of Choising Initial Probabilitities, en 1962. El importante libro de Bruno de Finetti, Probability, Induction and Statistic, publicado en 1972 en Roma está dedicado a Leonard Savage que había muerto repentinamente en Yale meses antes. Otras obras de estos dos autores serán citadas en capítulos posteriores, y quedarán reflejadas en la bibliografía final de este trabajo.

La nómina de autores partidarios de las teorías subjetivistas de la probabilidad es muy amplia, por ello, citaremos aquí, sólo de pasada, los nombres de algunos de ellos, no mencionados hasta ahora y cuya bibliografía, por haber sido consultada aparecerá reflejada en la bibliografía de esta tesis doctoral. Entre otros podríamos citar a F. Anscombe y R. Aumann, que escriben juntos una definición de probabilidad subjetiva; Henry E. Kyburg y Howard E. Smokler, que recopilan juntos un conjunto de artículos sobre el tema en la obra Studies in subjective Probability, aparecida en 1964; Peter C. Fishburn, John Kemeny, Patrick Suppes, George Henrik Von Wrigth, De Zeeuw, Jacques Dreze, E. Galanter, John W. Pratt, R. Duncan Luce, C. Villegas, Robert L. Winkler ... etc. Y entre los españoles partidarios de la teoría subjetivista podemos citar a Angel Vegas Pérez, Ubaldo Nieto de Alba, F. J. Girón, etc...

El tema de la teoría de la probabilidad subjetiva será analizado más extensamente en los siguientes capítulos; así algunas de las cuestiones superficialmente tratadas en este epígrafe que, como decíamos al principio, sólo trataba de dar una visión general de esta teoría como se venía haciendo con las otras, serán tratadas con más extensión en los capítulos dedicados específicamente a ellas.

3.5.- La teoría matemática de la probabilidad.

La teoría matemática de la probabilidad crea un modelo abstracto que permite calcular la probabilidad cuantitativa para cualquier suceso que cumpla determinadas condiciones, basándose en la teoría de la medida del análisis matemático.

La definición de probabilidad como límite de la sucesión de frecuencias relativas es la base para el modelo que fundamenta la teoría matemática de la probabilidad.

Para la creación de este modelo matemático se comienza observando los fenómenos reales, de tal manera que las operaciones que se definen entre los elementos del modelo recojan estas situaciones reales. De hecho, las operaciones definidas en la estructura matemática: unión, intersección y complementación hacen posible que cualquier suceso de un fenómeno real pueda expresarse con estas operaciones en función de otros sucesos de probabilidades conocidas.

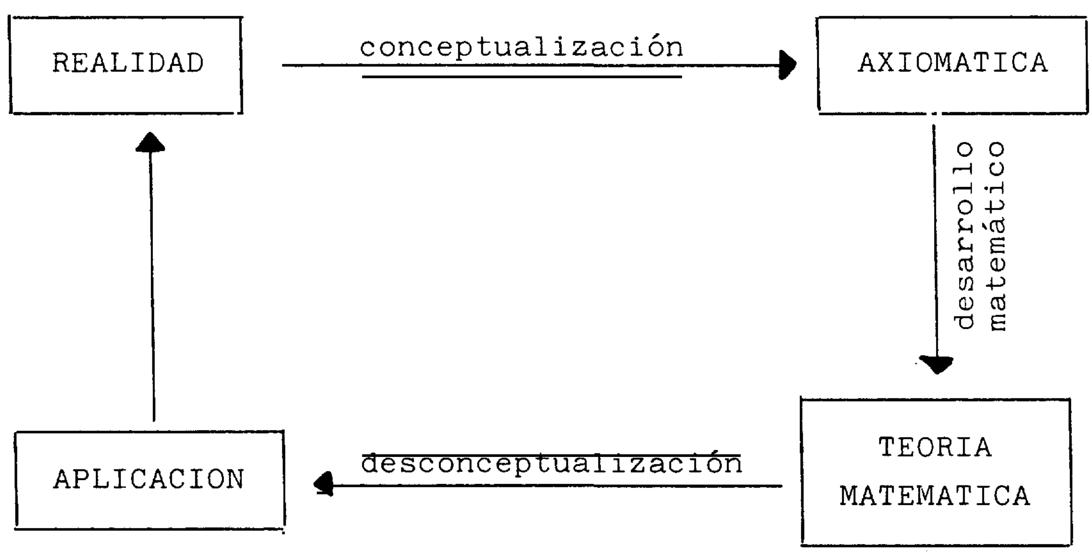
Hay que tener en cuenta que los procesos a realizar para crear y aplicar un modelo matemático son:

- Observación de los fenómenos reales y conceptualización de la idea intuitiva que recoge estos fenómenos.
- Axiomatización mediante la identificación de los conceptos referidos anteriormente con los elementos formales del

modelo. Esto es, los axiomas recogen las propiedades de esos elementos y las relaciones existentes entre ellos.

- Se deducen proposicones de estos axiomas creando así la base de comportamiento de la teoría.
- Los axiomas iniciales -fundamentales- deben ser compatibles entre ellos y es conveniente que sean independientes en el sentido de que unos no se deduzcan de otros.
- Una vez creada la base de la teoría matemática, se pasa a su aplicación real, es decir, interpretamos la teoría prácticamente.

El esquema siguiente del profesor Sixto Ríos (28) resume este proceso:



Esta teoría está justificada por el hecho de que, desde las investigaciones del siglo XIX en materia de probabilidad, había una tendencia a la axiomatización. Esta tendencia se manifestaba buscando una definición de probabilidad de tipo frecuencial, es decir, para fenómenos que presenten regularidad estadística, que asociase un valor numérico a los sucesos como medida del grado de incertidumbre que estos conllevan, y que cumpliera una serie de axiomas. Con esta formalización es más amplio el campo de aplicación de este concepto. No hay que olvidar que todo modelo matemático, que quiere interpretar la realidad, lo que hace es idealizarla, y por tanto simplificarla. Pero entonces se hará necesario, para considerar correcta la teoría matemática de la probabilidad, que ésta se vea confirmada por la experiencia.

El modo con que la teoría matemática de la probabilidad aborda el tema de la asignación de la probabilidad se desarrollaría como sigue:

Si se observa un experimento aleatorio y se considera uno de los sucesos "S" de ese experimento, siendo "n" el número de pruebas que se realizan, y es "f/n" la frecuencia relativa del suceso "S", supuesto que el experimento presente regularidad estadística se obtiene una sucesión de frecuencias relativas de "S", con "n" suficientemente grande, que diferirán poco entre sí.

Apoyándose en ese comportamiento regular, la teoria matemática establece que "P(S)" (la probabilidad del suceso "S") es la idealización matemática de la frecuencia relativa "f/n". En definitiva, para un valor grande de "n", "f/n" es aproximadamente igual a "P(S)".

Se trata, por tanto, de establecer la probabilidad P(S) (para todo suceso S) que cumpla determinadas condiciones. "P" es una función de medida -función editiva de conjuntos- y como tal hablaremos más adelante de ella.

En algunos casos no es necesario recurrir a la observación de la regularidad estadística de las frecuencias relativas como condición para determinar la probabilidad matemática, como ocurre cuando se admite entre los sucesos del experimento las reglas de la definición clásica.

A partir de 1920, comienza a considerarse el cálculo de probabilidades como una teoría matemática basada en la teoría de la medida. Fué en 1933, con la publicación de la obra de A. Kolmogorov Gundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrèchnung (Fundamentos de Probabilidad), cuando quedó axiomatizada la teoría matemática más ampliamente.

Veamos cuales son los elementos del esquema de Kolmogorov para la probabilidad:

1.- El espacio muestral Ω, que es el conjunto de todos los resultados posibles elementales a los que da lugar el experimento aleatorio. Este espacio puede ser finito, infinito numerable o infinito no numerable.

2.- La clase $\mathcal{A}$ de todos los subconjuntos de Ω, donde cada subconjunto representa un suceso excepto en el caso de que Ω sea no numerable. La clase $\mathcal{A}$ cumple las siguientes propiedades:

a) $\Omega \in \mathcal{A}$

b) Si $S \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bar{S} \in \mathcal{A}$

siendo $\bar{S}$ el complementario de S respecto de Ω.

c) Si se tiene un número infinito numerable de subconjuntos de Ω, S_1, S_2, ... S_n ... entonces:

$$\bigcup_i S_i \in \mathcal{A}$$

Con estas operaciones y propiedades $\mathcal{A}$ tiene estructura de σ-álgebra.

3.- La probabilidad P, que es función de medida establecida de $\mathcal{A}$ en el intérvalo $[0,1]$.

$$P : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$$

La probabilidad P cumple los siguientes axiomas:

I. $P(\Omega) = 1$

II. $\forall S \in \mathcal{A} \Longrightarrow P(S) \geq 0$

III. Si $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{A}$ y cada dos S_i son disjuntos $\Longrightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(S_i)$

que constituye la propiedad de aditividad finita.

Con estas propiedades se dice que P es finitamente aditiva. Aunque la aditividad finita es la que más se ajusta a la experiencia, sin embargo, para facilitar el desarrollo matemático de la teoría, y puesto que en la estructura de σ-álgebra está definida la unión infinita numerable de subconjuntos de Ω añadimos para P la propiedad de "completamente aditiva", es decir, también es aditiva para un número finito numerable de subconjuntos de Ω. Esta última condición determina el cuarto axioma.

IV. Si $S_1, S_2, \ldots S_n \ldots$, número infinito numerable de subconjuntos de Ω, disjuntos dos a dos, entonces se cumple:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(S_i)$$

Del axioma IV se deduce el III, puesto que si P es editiva para un número infinito numerable de subconjuntos de Ω, también lo será para un número finito; por esta razón, muchos autores suprimen el III en la axiomática.

En la teoría de la probabilidad formalizada por Kolmogorov es importante mencionar también el siguiente resultado:

$$P(S_i/S_j)= \frac{P(S_i \cap S_j)}{P(S_j)} \qquad \text{siendo} \quad P(S_j) \neq 0$$

En cuanto a la estuctura de σ-álgebra para la clase $\mathscr{A}$ y su relación con un álgebra de Boole conviene aclarar que si en la propiedad (c) de dicha clase se tiene un número finito de sucesos "S" porque Ω fuera finito, entonces:

$$S_1 , S_2 , \ldots\ldots\ldots S_n \in \mathscr{A} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} S_i \in \mathscr{A}$$

y la clase $\mathscr{A}$ tendría estructura de álgebra de Boole. Ahora bien, si Ω es infinito numerable y hay que realizar la unión infinita numerable, esto es, si

$$S_1 , S_2 , S_3 , \ldots , S_n \ldots \in \mathscr{A} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \in \mathscr{A}$$

entonces la clase $\mathscr{A}$ tiene estructura de σ-álgebra.

Sobre el origen del álgebra de Boole, R. Mattessich expone:

> "Fueron Auguste de Morgan (1806-71) y George Boole (1815-64) los que advirtieron las similitudes estructurales entre lógica y álgebra numérica, pero fué Boole en 1847 quién ingeniosamente inventó el primer álgebra práctica que obedecía los principios de la lógica" (29).

Con estos trés elementos Ω , $\mathcal{A}$ y P queda establecida la terna (Ω , $\mathcal{A}$, P) que recibe el nombre de espacio probabilístico, y es el esquema básico de la teoría matemática de Kolmogorov.

Hemos dicho anteriormente que los elementos de Ω se llaman resultados elementales; con ello, los sucesos representados por subconjuntos unitarios se llamarán sucesos elementales, y los que se deducen a través de ellos, compuestos. El problema inicial es la asignación de probabilidades de los sucesos elementales con cualquiera de las interpretaciones anteriores -frecuencial, clásica, logicista y subjetivista- y a partir de ellas se obtienen las de los otros sucesos por las reglas del cálculo de probabilidades -axiomas- antes expuestas.

Respecto a este punto, Max Black apunta:

> "La teoría matemática puede considerarse propiamente como neutral respecto a los análisis filosóficos rivales del concepto de probabilidad. Simplemente aporta una estructura abstracta (aunque asombrosamente fecunda) para calcular los valores de las probabilidades complejas (...) Los valores

> de las probabilidades de los resultados básicos deben ser proporcionadas a la teoría y no pueden determinarse dentro de ella" (30).

En cuanto estén determinadas las probabilidades de los sucesos elementales mediante cualquiera de las teorías anteriores, esas asignaciones se ajustan a las reglas de la teoría matemática. Esto es evidente para la teoría clásica y frecuencial (su propia evidencia hace innecesaria la profundización en este tema). En cuanto a la teoría subjetiva, ya dijimos en las páginas 130 y 132 que sus valores obedecen también a estas reglas de la teoría matemática y que, por tanto, permiten al subjetivista acceder a los axiomas matemáticos usuales y a sus consecuencias. Para el caso de la probabilidad lógica se establecería el mismo principio.

La axiomática de Kolmogorov si Ω es infinito no numerable es restrictiva para algunas aplicaciones. Hay, por tanto, algunos puntos que discutir de esta axiomática, como es el de la selección del campo de sucesos para el caso de que Ω sea infinito no numerable. Si el experimento se describe con un conjunto de resultados finito o infinito numerable, ya dejamos dicho que el campo de sucesos -que es la clase de los subconjuntos de Ω - tenía estructura de álgebra de Boole (si Ω finito) o de σ-álgebra (si Ω infinito numerable), y en ambos casos quedaba resuelto el problema. Ahora bien, si el experimento se describe con una variable real, es decir, Ω infinito no numerable, el álgebra de sucesos será un álbebra de Borel de los subconjuntos de la recta real. Fué Crámer el que introdujo esta sugerencia en los axiomas de la probabilidad.

El álgebra de Borel es el más pequeño σ-álgebra que contiene todos los intervalos. El álgebra de Borel de sucesos está generada por los sucesos más imples de los resultados experimentales, y contiene a todos los conjuntos que puedan obtenerse mediante la unión, intersección y complementación aplicados sobre los intervalos de la forma $[a,b]$. Puesto que el número de elementos de $\Omega \equiv \mathbb{R}$ es infinito, la $\cup$ e $\cap$ puede ser finita o infinita numerable. Es importante señalar, para otras definiciones de esta teoría, que los intervalos de la forma $[-\infty, x]$ también pertenecen a la clase de Borel.

Dejamos sin tratar los postulados fundamentales que se deducen de los axiomas, y por tanto también otros temas importantes de la teoría matemática de la probabilidad puesto que aquí -tal y como hemos hecho con las otras teorías- sólo queremos dar una imagen global de ella, para pasar a estudiar con más profundidad la teoría subjetivista -objetivo central de esta tesis doctoral- y parece lógico que toda persona interesada en el tema de la teoría subjetivista conoce la teoría matemática de la probabilidad como base formal para aplicar a las asignaciones básicas de la probabilidad -las de los sucesos elementales- de las otras teorías. Lo tratado en este epígrafe es un simple recordatorio de las ideas más fundamentales.

NOTAS AL CAPITULO III

(1) T. L. FINE, Theories of Probability, Academic Press, Londres 1973, pág. 167.

(2) Max BLACK, Inducción y Probabilidad, Ed. Cátedra, Madrid 1979, pp: 125 y 126.

(3) Alexander Mc Farlane MOOD y Franklin A. GRAYBILL, Introducción a la teoría de la estadística, Editorial Aguilar, Madrid 1978. pág. 11.

(4) Maurice BOUDOT , Lógica inductiva y probabilidad, Editorial Paraninfo, Madrid 1979, pp: 121 y 122.

(5) Harald CRAMER , Elementos de la teoría de probabilidades, Editorial Aguilar, Madrid 1977, pág. 13.

(6) Max BLACK , op. cit. pág. 132.

(7) H. CRAMER , Mathematical Methods of Statistics, Princeton Univ. Press, 1957, pág. 141.

(8) H. CRAMER, Elementos de la teoría de probabilidades, op. cit. pág. 9.

(9) M. BLACK , op. cit. pág. 133.

(10) Ubaldo NIETO DE ALBA , Introducción a la estadística, Vol II, Editorial Aguilar, Madrid 1975, pág. 40.

(11) Karl R. POPPER , La lógica de la investigación científica, Editorial Tecnos, Madrid 1977, pág. 142.

(12) Max BLACK, op. cit. pág. 134.

(13) M. BOUDOT, op. cit. pág. 129.

(14) Max BLACK, op. cit. pág. 129.

(15) M. BOUDOT, op. cit. pág. 136.

(16) T. L. FINE, op. cit. pág. 184.

(17) Rudolf CARNAP, "The aim of inductive Logic" en Logic, Methodology and Philosophy of Science, Nagel, E.; Suppes, P. and Tarski, A., (eds.). Stanford, Stanford University Press. (California). 1962, pág. 303.

(18) M. BLACK, op. cit. pág. 129.

(19) George Henrik von WRIGHT, A Treatise on Induction and Probability, Harcourt Brace and Co., New York 1951, pp: 151 y 152.

(20) Richard MATTESSICH, Instrumental reasoning and systems methodology, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht (Holland) 1978, pág. 163.

(21) Idem., pág. 184.

(22) K. R. POPPER, op. cit. pp. 43 y 44.

(23) B. O. KOOPMAN, "The axioms and algebra of intuitive probability" en Annals of Mathematics 1940, vol, 41 nº 2, pág. 269.

(24) M. BLACK, op. cit., pág. 136 y 137.

(25) L. J. SAVAGE , The Foundations of Statistics, Ed. Dover, 1971, pág. 3.

(26) T. L. FINE, op. cit. pág. 212.

(27) Bruno DE FINETTI, Theory of Probability, Vol. I, Ed. Wiley, 1979, pág. XII (prefacio).

(28) Sixto RIOS, Métodos estadísticos, Ediciones del Castillo, Madrid 1967, pág. 19.

(29) Richard MATTESICH, op. cit. pág. 74.

(30) Max BLACK, op. cit. pp: 112 y 113.

C A P I T U L O IV

FUNDAMENTOS DE LA TEORIA SUBJETIVA DE LA PROBABILIDAD.

CAPITULO IV: FUNDAMENTOS DE LA TEORIA SUBJETIVA DE LA PROBABILIDAD.

"Los frecuencialistas no están ausentes de subjetivismos, y los que militamos en el bayesianismo pretendemos demostrar que todo lo que tiene de atractivo la teoría frecuencialista está implícito en la teoría personalista".

Leonard J. Savage, en U. Nieto de Alba, Introducción a la Estadística, vol. II, Madrid 1975, pág. 41.

4.1.- Introducción.

Desde principios de siglo, algunos filósofos han tratado de establecer la tesis de que las probabilidades atribuidas por una persona a los sucesos posibles de un experimento aleatorio son necesariamente de naturaleza subjetiva. Esta tesis era mantenida partiendo fundamentalmente de algunas ideas expuestas por James Bernoulli del que ya hemos hablado con relativa amplitud en otros apartados de este trabajo. Las principales ideas desarrolladas por Bernoulli en el comienzo de la cuarta parte de su obra Ars Conjectandi (1) se pueden expresar brevemente como sigue:

- El conocimiento que un individuo en un momento dado tiene a su disposición es, a veces, insuficiente para obtener "certeza" acerca de la ocurrencia o no ocurrencia de un posible suceso.

- Sobre esta base el individuo puede obtener solamente "un grado de confianza" definido, que es a la certeza como un subconjunto es al conjunto total, y que es llamado "probabilidad". Este grado de confianza o probabilidad depende del conocimiento que el individuo tiene a su disposición y, por tanto, puede variar de unos individuos a otros.

- El "arte de la estimación" (ars conjectandi) consiste en estimar, de forma tan precisa como sea posible, los valores correctos de las probabilidades relativas al conocimiento del que se dispone de los diferentes sucesos posibles.

- El grado de confianza puede atribuirse a la posibilidad, que depende del peso de los argumentos a favor y en contra del suceso.

- El peso de un argumento de un tipo bastante general depende del número de casos en el que el argumento es válido, con tal de que los casos puedan ocurrir con igual probabilidad.

- Excepto en los casos simples de los juegos de azar, donde la equiprobabilidad es forzada artificialmente, raras veces podemos saber si los diferentes casos son igualmente probables o no, y por tanto, pocas veces podemos atribuir probabilidades correctas "a priori".

- Estas probabilidades sin conocimiento previo pueden ser estimadas "a posteriori" por medio de un gran número de observaciones.

- El grado de confianza es menor que la certidumbre y no aumentará por el crecimiento del número de observaciones.

A pesar de que en estas ideas existan pequeños indicios de subjetivismo, la teoría de J. Bernoulli no es, decididamente, una teoría subjetiva.

La teoría subjetivista comienza a desarrollarse de forma explícita y general con el trabajo de Leonard J. Savage, The Foundations of Statistics, publicado en 1954 y obra fundamental de esta teoría como ya ha sido comentado en varias ocasiones. Sin embargo, aunque este trabajo trate de forma más completa dicha teoría, no debemos olvidar que el primer intento claro de axiomatización lo encontramos en los trabajos de Bruno De Finetti publicados en 1931 y 1937, tal y como referimos al comienzo del epígrafe 4.4.1. de esta tesis.

Las ideas de Savage proceden -como ya hemos hecho referencia en el capítulo anterior- de F. P. Ramsey, de Von Neumann-Morgenstern y de la Escuela de Econometría de Chicago.

Savage, como sus predecesores, piensa que la única interpretación consistente de la probabilidad es un grado de confianza subjetivo que una persona tiene en la verdad de una proposición, y que es el único concepto de probabilidad esencial para la ciencia estadística y para otras actividades que necesitan de estos conceptos. Este matíz de Savage implica que carece de sentido distinguir entre evaluaciones correctas y erróneas, excepto que se violen los axiomas de la teoría de la probabilidad.

Uno de los puntos fundamentales del trabajo de Savage es intentar evitar la confusión, que a veces se crea, entre los partidarios de la teoría subjetivista que confunden los siguientes puntos de vista:

1.- La creencia de que la teoría de la probabilidad trabaja con las probabilidades subjetivas realmente atribuidas por un individuo a todos los sucesos posibles.

2.- La creencia de que esta teoría trabaja con las probabilidades que un individuo debe atribuir a los sucesos de acuerdo con una norma dada.

Este segundo punto de vista se puede describir también matizando que la teoría subjetivista trabaja con las probabilidades que una persona ideal (racional, coherente, que se atiene a las normas) atribuye a los sucesos.

Si, por el contrario, aceptamos el primer punto de vista, el posterior tratamiento axiomático de la probabilidad requeriría la prueba empírica de que el individuo en consideración atribuye realmente tales probabilidades a los sucesos satisfaciendo los axiomas. Las preferencias por determinados sucesos, o incluso las probabilidades de sus consecuencias, llevarían a establecer un orden parcial entre ellas, que sería válido solamente para un único momento. Por tanto, si las probabilidades están definidas como características de un individuo son entonces probabilidades subjetivas; pero no podemos calcular probabilidades subjetivas si los axiomas no se satisfacen consistentemente.

Con el segundo punto de vista, que Savage llama "normativo" debido a que una persona real se comporta como ideal, es posible atribuir a esa persona ficticia cualquier consistencia que se desee. Debe considerarse pues un mérito de Savage el que hiciera la distinción entre las dos interpretaciones, y que deliberadamente eligiera esta segunda.

En la obra citada, Savage demuestra, usando una definición bastante razonable de consistencia, que una persona que actuase consistentemente -si tal persona existiese- se comportaría como si asignase probabilidades subjetivas que obedecerían exactamente a las leyes usuales de la probabilidad. En este caso hablaríamos de autoconsistencia.

En los supuestos económicos más simples, esto es en los supuestos en los que intervienen las apuestas con pagos en dinero, que son los casos más facilmente tratados matemáticamente, la autoconsistencia está garantizada por el hecho de que cualquier transgresión que se haga de los axiomas se castiga económicamente. Pero la teoría ha de extenderse para cubrir todas las decisiones, y no sólo las citadas, puesto que los premios no son en general económicos y es necesario introducir una medida del premio o ganancia (en su caso, pérdida) producidos por cualquier decisión. Savage -siguiendo a Von Neumann y Mongenstern- tuvo una idea ingeniosa en este sentido: comparar cualquier premio con un número de tickes de una lotería, de tal manera que el individuo será consistente, en esta situación, respecto a sus preferencias tomando entonces las decisiones pertinentes con la máxima utilidad esperada.

En los argumentos de Savage encontramos que una persona consistente (coherente) establecerá probabilidades que obedecerán las mismas leyes que las probabilidades frecuenciales y las valoraciones de ambas serán iguales cuando estas últimas (las frecuenciales) sean conocidas. Del mismo modo esa persona establecerá los valores de sus propias utilidades que usará en el proceso de toma de decisiones. Esto no significa que el complejo proceso mental de la toma de decisiones y de la valoración de los grados de creencia puede comprimirse hábilmente en unos cuantos números, pero sucede que estos números son suficientes para relacionar los resultados finales de estos dos procesos en forma matemática.

Vamos a suponer, por el momento, que las probabilidades subjetivas son exactamente medibles y obedecen las mismas leyes que las frecuencias. Con este supuesto, los métodos personales, aunque estrictamente hablando sean subjetivos, tienen la ventaja de que indican cuando la respuesta es virtualmente objetiva.

Uno de los problemas que encontramos a la hora de establecer probabilidades subjetivas es que las personas son demasiado imprecisas e inconsistentes (en el sentido que antes definimos). Para paliar este inconveniente, es suficiente que los argumentos de consistencia, antes propuestos por Savage, ayuden a decidir como podríamos pensar o actuar razonablemente cuando los datos son demasiado complicados para analizarlos intuitivamente. La teoría frecuencial ayuda, también, a asignar razonablemente las probabilidades, y en este sentido tiene el mismo objetivo.

Por esta imprecisión y ambigüedad de las personas, las probabilidades y utilidades no están definidas de manera única sino que se determinan en un cierto campo de aplicación dependiente de la situación real de cada momento, y aunque los cálculos se compliquen por la imprecisión de las probabilidades la persona, en la práctica, siempre tiene que tomar una decisión de una forma u otra. Una forma de establecer probabilidades y utilidades iniciales consiste en obtener la decisión de tal manera que maximice la utilidad esperada. Con la teoría de Savage no necesitamos tomar los mismos valores para esas probabilidades y utilidades cada vez que elaboramos una decisión sino que depende en cada caso de la situación presente. Esto significa que lo más simple, desde el punto de vista práctico, es comportarnos según el método de Savage, con la reserva de que algunas decisiones y conclusiones tienen cierta flexibilidad. No hay, por supuesto, ninguna ley que nos obligue a probar que se es consistente; cualquiera es libre de hacer el tipo de análisis que desee. Pero supongamos que uno desea optimizar dicho análisis de acuerdo con algún criterio como "cometer el mínimo número de errores posible" o "maximizar el beneficio"; entonces si formulamos cualquiera de estos criterios de forma numérica exacta, encontraremos que son consistentes, en el sentido de que no se afirma simultáneamente que A es mejor que B y que B es mejor que A. Cualquiera de los diferentes métodos de análisis basados en tales criterios deben necesariamente satisfacer la teoría de Savage.

Un método de aproximación propuesto por Smith (2) para usar en la práctica consiste en lo siguiente: cada hipótesis H_i puede tener su propia probabilidad inicial $P(H_i)$, y después de que el suceso X haya sido observado calcularíamos la verosimilitud $P(X/H_i)$ o probabilidad condicional de observar el suceso X supuesto que H_i es verdadera. En principio esta verosimilitud puede ser una probabilidad dependiente de una opinión personal, pero en muchos casos será una probabilidad frecuencial; afirmaremos entonces que las probabilidades finales o "a posteriori" de las H_i son proporcionales a $P(H_i) \cdot P(X/H_i)$.

Si la verosimilitud es una probabilidad frecuencial, podemos calcularla numéricamente, y cualquier persona puede proporcionar sus propias habilidades iniciales y determinar a partir de ellas sus probabilidades finales y, por tanto, su propia interpretación o decisión. Esto que tiene un sentido perfectamente objetivo a veces puede complicarse.

En el sentido subjetivo si pensamos que individuos diferentes no es probable que difieran mucho en sus probabilidades iniciales, podríamos probar a escoger alguna distribución inicial que no estaría necesariamente de acuerdo con todas las opiniones individuales, pero que puede ser razonablemente aceptable para todos como una aproximación de la distribución de probabilidad requerida.

Podemos establecer un número de diferentes hipótesis posibles, especificadas mediante distribuciones iniciales. Por ejemplo podríamos investigar las conclusiones que suponen por una parte que las varianzas verdaderas en un proceso sean iguales, y por otra que dichas varianzas sean desiguales. Estas son conclusiones extremas y la mayoría de las personas asignarían a cada uno de estos supuestos extremos una probabilidad. Si dichas asignaciones no difieren apreciablemente, entonces podemos estar seguros de que todas llegaran efectivamente a la misma conclusión. Esta conclusión será entonces prácticamente "objetiva" en el sentido de que las personas están generalmente de acuerdo. Pero si los resultados de los dos supuestos difieren notablemente, debemos permitir que las diferentes personas lleguen a conclusiones diferentes sobre los mismso datos. Cada persona tiene derecho a su propia opinión, y los datos son entonces insuficientes para asegurar cualquier conclusión de acuerdo general. El único recurso en este caso es, por tanto, recoger más datos. Sobre este asunto de las opiniones o juicios individuales y de grupo, así como sobre otras cuestiones tratadas en esta introducción hablaremos en el desarrollo de este capítulo.

Teniendo en cuenta lo que acabamos de comentar, una de las ventajas de la aproximación que depende de una opinión personal es que puede claramente indicar cuándo podemos esperar una conclusión objetiva y cuándo esperaremos una conclusión subjetiva.

Los métodos utilizados por estas aproximaciones pueden dar, en algunos casos, una respuesta única, pero los datos disponibles no siempre conducen a conclusiones únicas. En definitiva, la confianza en cualquier método sólo llega con la experiencia, por muy buenos que sean sus fundamentos teóricos.

4.2..- Algunas ideas respecto a los métodos de obtención de probabilidades subjetivas.

Bruno De Finetti y L. J. Savage, unidos en el estudio del subjetivismo, proponen una noción de probabilidad personal o subjetiva que puso en duda las técnicas estadísticas aceptadas hasta ese momento, proponiendo los métodos de obtención de probabilidades personales aproximados a través de las ideas de la teoría de la decisión estadística, y en los que el método teórico de la toma de decisiones proporciona una nueva base para definir la probabilidad personal.

Bruno De Finetti (3) cree que no hay necesidad de suponer que la probabilidad de algún suceso tiene un único valor determinable. Su punto de vista filosófico es que la probabilidad expresa el sentimiento de un individuo y no puede tener significado excepto en su relación con él. El trabajo detallado de este autor es parte importante de la base para la aproximación de la probabilidad subjetiva o personalista, por lo que la probabilidad subjetiva es considerada como una cuantificación de la incertidumbre. La probabilidad subjetiva representa hasta que punto una persona coherente cree que una afirmación es cierta, basada en la información disponible para él en el ese momento. Para que el individuo sea coherente se requiere que cada valoración sea consistente con cada una de sus restantes valoraciones, tal que no existan contradicciones fundamentales entre ellas. Estas restricciones de coherencia aseguran, como ya comentamos en el epígrafe anterior, la aplicabilidad de los axiomas convencionales de la probabilidad, para facilitar así el manejo de las cantidades correspondientes a las probabilidades valoradas.

Ya hemos hecho referencia anteriormente a la incapacidad de las definiciones clásica y frecuencial de la probabilidad para resolver el problema de valorar probabilidades que se refieren a sucesos únicos. Esta incapacidad nos lleva a explicar por que la probabilidad requerida en el análisis de toma de decisiones es necesariamente una probabilidad que haya sido subjetivamente valorada. La naturaleza y ocurrencia probable de los sucesos en dicho análisis estará en la esfera de la experiencia del decisor, cuyo conocimiento pasado es valorable. Pues mediante el uso de su juicio, su experiencia es explícitamente incorporada en el análisis. Esas valoraciones de la experiencia son una medida que se requiere para el análisis de la decisión basado en un esquema bayesiano.

Una línea general de esta aproximación analítica consiste en: 1. Formular la lista de todas las posibles decisiones y sucesos; 2. Mediante el árbol de decisión, identificar los resultados de cada decisión con cada suceso posible; 3. Valorar en términos de utilidad los resultados y 4. Establecer la probabilidad de ocurrencia de los sucesos.

En este proceso hay que distinguir si el decisor es un individuo o un grupo de ellos. En el primer caso, con un sólo individuo, podemos establecer dos aproximaciones para calcular la probabilidad subjetiva de la ocurrencia de un suceso:

1. La persona puede ser directamente interrogada acerca de sus juicios. Esta es la aproximación más simple, que consiste en preguntar a la persona cúal es su probabilidad para un suceso, y puede expresar su creencia estableciendo un número entre 0 y 1, o mediante una respuesta visual dividiendo un segmento en dos partes cuyas longitudes correspondan a la probabilidad de dos sucesos disjuntos.

2. Las valoraciones de la persona pueden ser inferidas a partir de sus preferencias entre decisiones posibles. Este método indirecto del que Savage era más partidario elimina la desventaja a que da lugar la discrepancia entre los juicios que se mantienen realmente y los formulados en las probabilidades valoradas directamente. Un procedimiento para aplicar este método consiste en usar una técnica de juego o lotería para obtener la probabilidad subjetiva de la ocurrencia de sucesos únicos. En este caso, las probabilidades vienen inducidas a partir de las probabilidades de las apuestas de dicho juego.

Antes hemos manifestado, al referirnos a la línea general para la aproximación analítica de la probabilidad, que hay que valorar la probabilidad de ocurrencia de los sucesos, y esto requerirá a veces en la práctica establecer muchos valores posibles de probabilidades correspondientes a cantidades inciertas. Este problema de asignar probabilidades a un número de valores posibles de una cantidad incierta, se convierte en la valoración de una distribución de probabilidad. Los métodos sugeridos para tales valoraciones son: el ajuste de la curva de los juicios directos, los datos históricos y el uso de la hipotética información muestral. Los datos históricos disponibles generalmente determinan la forma de la función de probabilidad que expresa la valoración de la distribución.

En el caso de que el decisor sea un grupo de individuos el análisis bayesiano formal concibe la valoración de una función de probabilidad subjetiva individual. Pero si esa función tiene que ser asignada por un grupo de individuos surge la cuestión de la aplicabilidad del análisis, a no ser que las valoraciones individuales coincidan o puedan combinarse para dar una sola valoración de todo el grupo, o los miembros del grupo puedan ser persuadidos para que modifiquen sus juicios de acuerdo con un sólo juicio individual.

Si cada uno de los individuos del grupo proporciona una distribución de probabilidad individual que representa su juicio, Winkler (4) sugiere -como veremos más adelante- un número de esquemas basados en la combinación lineal de las distribuciones individuales para obtener una única distribución del grupo.

Las ponderaciones usadas en tal combinación lineal reflejan la racionalidad y habilidad de cada uno de los individuos, así como su experiencia. Es decir, las ponderaciones expresan que unos individuos son mejores valoradores que otros. En el caso de que todos se consideren igualmente capaces para hacer buenas valoraciones las ponderaciones serían iguales. Winkler concibe una autoridad que es responsable del grupo y que hará el esquema de las valoraciones de las ponderaciones.

Otras ponderaciones propuestas están basadas en la autoclasificación de los miembros del grupo o en las comparaciones deducidas de distribuciones valoradas previamente con resultados reales. El esquema de las ponderaciones propuesto por la autoridad nombrada de antemano, a la que llamaremos D para abreviar, puede reconocerse como un sistema de la decisión del grupo donde todos sopesan las opiniones de los demás miembros.

Un método alternativo sugerido por el mismo Winkler consiste en que cada distribución individual sea un miembro de una familia de distribuciones, y tales distribuciones puedan combinarse de manera similar a las sucesivas aplicaciones del teorema de Bayes. Estos métodos distintos producen resultados diversos, pero Winkler mantiene que D es responsable de la valoración final de la distribución individual consensuada y D usaría los métodos que simplifiquen el problema y que considere relevantes.

Algunos comentarios utiles sobre el problema del consenso en las valoraciones de grupo al que nos referiremos más extensamente en un apartado posterior pueden encontrarse en referencias como la de R. B. Wilson (5) que plantea un problema de decisión de grupo. La estructura de dicho problema consiste en que existe una decisión común elegida α que depende de un resultado ε de una variable aleatoria, y el pago que resulta $x = p(\varepsilon, \alpha)$ se distribuye mediante alguna regla entre los miembros del grupo. En dicha referencia se da la justificación matemática para la consideración de una valoración de grupo de la probabilidad y de la función de utilidad.

La discusión matemática del problema del consenso de grupo supone que cada miembro ha valorado ya sus respectivas distribuciones y hay que llegar a un acuerdo de las distintas opiniones, estimulando a cada individuo a reconsiderar su valoración, después de presentarle algunas observaciones de las valoraciones de todos los miembros del grupo. Winkler considera dos de tales aproximaciones; además de las referidas anteriormente basadas en la combinación lineal de las distribuciones individuales, estas dos últimas aproximaciones son: la realimentación y revaloración y la revaloración del grupo. El primer método consiste en presentar a un miembro las valoraciones anónimas del resto de los miembros del grupo, para obtener una nueva valoración de este individuo, una vez que conoce las de los demás. El método se repite con todos los miembros del grupo hasta obtener una convergencia de todas las valoraciones. El segundo método, la revaloración de grupo, consiste en presentar a los individuos como un grupo y que estos discutan el asunto hasta llegar a un consenso individual. Ambos métodos son behavioristas y nos referimos a ellos más extensamente en el epígrafe 4.5.2.2. de este mismo capítulo.

N. Dalkey (6) critica tales discusiones de grupo por que cree que son dificultadas por la influencia de los individuos dominantes (líderes de grupo), la poca comunicación entre los miembros, y por la distorsión de los juicios individuales debida a las influencias del propio grupo sobre los individuos que lo componen. Dalkey está de acuerdo con un método que consiste en que los miembros del grupo sean expertos en el tema que se considera y ellos independientemente desarrollen sus valoraciones de probabilidad, hagan explícitas sus hipótesis y fuentes de información y soliciten cualquier fuente adicional para mejorar dichas valoraciones. En definitiva, Dalkey antepone las valoraciones individuales de miembros con experiencia a cualquier valoración ponderada o consensuada del grupo.

Para el análisis de toma de decisiones aplicado a las decisiones empresariales o de negocios, en los que es frecuente que sea un grupo de individuos el que tenga que tomar la decisión, estas teorías sobre la interacción del grupo y sus efectos en la toma de decisiones han sido seriamente consideradas. Sobre este asunto se han desarrollado prioritariamente algunos aspectos: a) La difusión o reparto de la responsabilidad: Al compartir la responsabilidad, la propia experiencia del grupo reduce la ansiedad ante el riesgo de las posibles consecuencias negativas de la decisión puesto que la responsabilidad se reparte sicológicamente entre los miembros del grupo. b) La especialización y la familiarización con el problema: Los miembros del grupo, familiarizados con el problema, asumen mayores riesgos en la toma de decisiones a causa de la reducción de la incertidumbre que lleva aparejada la decisión. c) Otros aspectos similares de la decisión empresarial.

Resumiendo hemos tratado en este apartado métodos que pueden usarse para establecer probabilidades subjetivas y hemos visto cómo los esquemas de la toma de decisiones puede usarse para ello. Ha surgido el problema del consenso para el caso que sea un grupo y no un individuo aislado el que tenga que establecer dichas valoraciones, problema que será tratado más ampliamente en un apartado posterior una vez que se hayan formulado las distintas axiomaticas que distintos autores proponen como base formal que fundamente la teoría de la probabilidad subjetiva y con ellas queden formalmente establecidos los requerimientos necesarios para establecer dicha probabilidad. Otro asunto no mencionado en este apartado pero que merece una referencia que cierre este epígrafe es el tema de las reglas de puntuación o de tanteo, es decir, la práctica y técnica en la valoración de probabilidades, puesto que esta técnica puede reducir inconsistencias en las valoraciones del decisor.

Las reglas de puntuación nos capacitan, en principio, para descubrir las opiniones de las personas implicadas en la toma de decisiones y, por tanto, implicadas en la asignación de grados de creencia de los distintos sucesos posibles. Los posibles campos de aplicación los encontramos preguntando porqué y cuándo estamos interesados en las opiniones de dichas personas. A veces queremos hacer uso de una persona considerada experta, a la que llamaremos experto o asesor.

El dominio de la aplicación potencial de las reglas de puntuación propias es sugerido, no tanto por el problema de obtener las opiniones de otros, como por la dificultad de obtener la nuestra propia. Pero eso no significa que sea fácil obtener nuestra propia probabilidad. La imprecisión es el mayor obstáculo para ello y la primera opinión es a veces modificada cuando tenemos más datos implicados.

Los que han experimentado por ellos mismos, o a través de otros, la práctica frecuente con reglas de puntuación sienten que estas ayudan a una persona a combatir la ambigüedad (imprecisión), y a conseguir más rápidamente y de forma más precisa su probabilidad personal. Esta proposición podría ser difícil de investigar experimentalmente e, incluso, parece difícil de establecer con precisión, pero si logramos establecerla puede resultar de gran utilidad.

En general, la buena comunicación entre los expertos es la que hace que se distribuya la información y así ayudar a otros a pensar a través de sus opiniones de forma aproximada, y la mala comunicación será, por contra, la que estimula varios vicios como la exageración o la diferencia excesiva en las valoraciones por parte de diferentes personas. Más tarde o más temprano, a pesar de todas las técnicas de comunicación, las opiniones divergentes de los expertos tendrán que ser enfrentadas. Una solución para resolver estas posibles divergencias es utilizar la combinación de uno o más expertos al tiempo que la nuestra propia. Un procedimiento para establecer la combinación de las valoraciones sería el ya referido anteriormente al hablar del consenso en las valoraciones de grupo, de promediar las opiniones, es decir, de hacer el promedio de las distribuciones de probabilidad asignadas por el grupo de expertos, dando a cada una la ponderación que consideremos apropiada.

4.3.- La cuantificación del juicio o grado de creencia.

Según se viene repitiendo en este trabajo la teoría de la probabilidad subjetiva prescribe que una persona usaría las valoraciones de la probabilidad personal en la elaboración de decisiones, y que estas valoraciones se corresponderían con su juicio. También ha sido introducido en el epígrafe anterior la figura del experto o asesor; por tanto, vamos a considerar que el juicio se establece en la mente del asesor. Por ello, De Finetti ha propuesto el desarrollo de los métodos que obligan al asesor a hacer que las valoraciones se correspondan con sus juicios, y por tanto, que su comportamiento se investigue bajo tales métodos.

En la teoría personalista de la probabilidad, como ya ha sido establecido, la probabilidad mide la confianza que un individuo particular tiene en la verdad de una proposición particular. El punto de vista personalista difiere de otras aproximaciones, como ya ha sido tratado, al no intentar especificar que valoraciones son correctas. Todas las valoraciones autoconsistentes, o coherentes, son admisibles hasta el punto que el individuo piense que se corresponden con su juicio.

Se puede probar que las probabilidades personales valoradas de acuerdo con ciertos postulados de coherencia sobre el comportamiento deben estar de acuerdo matemáticamente con una medida de probabilidad.

Si negamos la existencia de valoraciones correctas de la probabilidad, estamos negando el carácter normativo de la habilidad de los asesores al valorar las probabilidades de los sucesos. Aunque no estemos interesados en un sentido normativo acerca de cómo las valoraciones de probabilidad se corresponden con algo en la realidad, sin embargo, si estamos interesados en que las valoraciones de dichas probabilidades se correspondan con los juicios del asesor.

Según la teoría personalista de la probabilidad las valoraciones de un experto o asesor y las de otra persona cualquiera son igualmente buenas si además de ajustarse a los postulados de coherencia se corresponden con sus respectivos juicios. Por ejemplo, si el experto valora que la probabilidad de que ocurra un suceso es 0,9 y otra persona cualquiera valora que es 0,20, si este suceso ocurriera realmente parecería mejor la valoración del experto, sin embargo, de acuerdo con la teoría, las dos valoraciones son igualmente buenas si se corresponden con sus juicios respectivos. Debe tenerse en cuenta que, aunque las axiomatizaciones de la teoría no tengan que ver con la habilidad del experto, sin embargo, no puede olvidarse la habilidad del experto en las aplicaciones de la teoría.

Entonces, nuestro interés en las valoraciones de la probabilidad personal se centrará en dos condiciones:

1. Las valoraciones de la probabilidad obedecen ciertos postulados de coherencia.
2. Las valoraciones de la probabilidad se corresponden con los juicios del experto o asesor.

Si tuvieramos un conjunto de probabilidades valoradas, es bastante sencillo verificar la condición primera, sin embargo, no es posible verificar la segunda condición, ya que una valoración de la probabilidad es el resultado de la interacción, o proceso intuitivo, de numerosos grados de creencia o juicios, que existen en la mente del asesor. Además cualquier conjunto de probabilidades valoradas se define solamente de forma válida para un instante dado de tiempo, y está sujeto a revisión cuando el asesor obtiene nueva información. Por ejemplo, podemos desear cambiar nuestra valoración de la probabilidad del suceso "mañana lloverá" si justo después de elaborar esta valoración disponemos de más información al observar el cielo y costatar la existencia de nubes oscuras. Tendríamos dificultades si tuvieramos que realizar estimaciones de probabilidades en cada momento según vayamos disponiendo de nuevas informaciones, por ello, nuestro propósito consiste en elaborar las decisiones a partir de estimaciones aproximadas de las probabilidades.

A pesar de que no podemos verificar la condición número dos, como hemos dicho antes, podemos intentar, sin embargo, desarrollar métodos para ayudar al asesor a valorar probabilidades que estén de acuerdo con sus juicios. Una aproximación a la valoración de probabilidades es la interrogación directa que consiste en formular preguntas que impliquen probabilidades, por ejemplo, probabilidades de apuestas, observaciones de muestras futuras, loterias hipotéticas, etc. Este tipo de aproximación tiene el inconveniente de que el asesor no tiene estímulos para hacer que sus valoraciones se correspondan con su juicio. Por ejemplo, si al asesor se le pregunta directamente por la probabilidad del suceso "mañana lloverá" puede decir un número que se le ocurra como valoración de tal probabilidad. Ahora bien, si conseguimos estimular la decisión del asesor implicando en ella un premio o pago, se consigue optimizar la valoración al depender ésta del premio.

En definitiva, siguiendo a Bruno De Finetti:

> "Queremos construir y proporcionar para uso práctico métodos que favorezcan automáticamente la expresión de los grados de creencia de cualquier persona" (7).

Si suponemos además que los juicios del asesor con respecto al problema considerado pueden estar representados por una distribución de probabilidad f(x) de una variable aleatoria X. Consideramos una partición del campo de variación de X en partes $X_1, \dots, X_n$, entonces f (x) puede estar representada por $p_1, \dots, p_n$, siendo $P_i = P(x \in X_i)$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

La distribución de probabilidad real valorada o conjunto de respuestas estará denotada por r(x), o por $r_1 , \ldots , r_n$ si se considera una partición de n subonjuntos o partes. La única restricción impuesta a esta distribución de probabilidad real es que no debe violar los postulados de coherencia. Entonces, tenemos interés en analizar métodos que conduzcan al asesor a que r(x) coincida con f(x), es decir, a hacer r_i igual a p_i, para $i = 1, 2 , \ldots , n$.

Un método para analizar las respuestas del asesor consiste en ofrecer a dicho asesor una serie de apuestas. Estas apuestas son reales y no hipotéticas, en el sentido de que en cada caso es una persona determinada el ganador de la apuesta y, por tanto, que la cantidad de dinero implicada realmente cambia de dueño.

Veamos el método propuesto por R. L. Winkler: En cada caso presentado, el experto o asesor debe elegir entre dos apuestas y no puede dejar de apostar. En primer lugar el asesor debe elegir entre una apuesta con probabilidades fijadas q y 1-q de ganar y perder, y una apuesta que depende de si ocurre un suceso E o no ocurre.

APUESTA 1.a.: El asesor gana la cantidad A si ocurre el suceso E.

El asesor pierde la cantidad B si no ocurre el suceso E.

APUESTA 1.b.: El asesor gana la cantidad A con probabilidad q.

El asesor pierde la cantidad B con probabilidad 1-q.

Si p es la probabilidad de que ocurra el suceso E, los valores esperados de las apuestas 1.a y 1.b por el asesor son respectivamente; valor esperado para la apuesta 1.a. =

$$= A.p - B\,(1-p) = A.p + B.p - B$$

valor esperado para la apuesta 1.b =

$$= A.q - B\,(1-q) = A.q + B.q - B$$

Por tanto, podemos extraer las siguientes inferencias de la posible decisión del asesor. Si la apuesta 1.a es elegida

$$A.p + B.p - B \geq A.q + B.q - B$$

por tanto

$$p \geq q$$

De forma similar si elige la apuesta 1.b

$$A.q + B.q - B \geq A.p + B.p - B$$

entonces

$$q \geq p$$

Vemos, por tanto, que la elección de una de estas apuestas llevaría al asesor a una desigualdad que implica p , puesto que habíamos dicho que la probabilidad q estaba fijada. Es interesante notar que la elección de una apuesta por parte del asesor es independiente de A y B.

Si existe un suceso E' que ocurre con una probabilidad q bien establecida, con la que el asesor está familiarizado, entonces la apuesta 1.b. estaría condicionada por el hecho de que ocurra el suceso E' o no ocurra. En esta situación q no está explícitamente formulada pero está implícita por la elección del suceso E'. Para la mayoría de los valores de q , se puede encontrar el suceso conveniente E' aunque esto dependerá de la experiencia del asesor con diversos tipos de sucesos.

El segundo caso, difiere del anterior en que el asesor debe elegir entre dos aspectos de la misma apuesta.

APUESTA 2.a: El asesor gana la cantidad A si E ocurre
El asesor pierde la cantidad B si e no ocurre

APUESTA 2.b: El asesor gana la cantidad B si E no ocurre
El asesor pierde la cantidad A si E ocurre

Los valores esperados de las apuestas 2.a y 2.b son:

valor esperado de la apuesta 2.a =

$$= A.p - B\ (1-p)$$

valor esperado de la apuesta 2.b =

$$= B\ (1-p) - A.p$$

Si la apuesta 2.a es elegida

$$A.p - B\ (1-p) \geq B(1-p) - A.p$$

de donde se deduce que:

$$P.(A+B) - B \geq B - P.(A+B)$$

$$2\ P.(A+B) \geq 2\ B$$

por tanto

$$p \geq \frac{B}{A+B}$$

Si la apuesta 2.b. es elegida la desigualdad última resultaría a la inversa. En esta segunda situación vuelve a ocurrir que la elección de la apuesta lleva al asesor a una desigualdad que implica p y en este caso la elección de dicha apuesta por parte del asesor depende de A y de B.

Mediante las apuestas presentadas obtenemos información acerca de la probabilidad del suceso E dependiendo de la elección realizada por el asesor. Tomando E como una combinación cualquiera de intervalos de la recta real, podemos obtener información sobre f(x) que es la representación de la distribución de probabilidad mencionada anteriormente. Las situaciones de apuesta presentadas proporcionan resultados a partir de las desigualdades que implican las probabilidades, tal y como acabamos de exponer. Naturalmente, podemos usar estas situaciones de apuesta para determinar una probabilidad con cualquier grado de precisión deseado, pero para obtener un alto grado de precisión se requeriría un mayor número de apuestas. una forma de evitar el problema de aumentar el número de apuestas sería valorar las probabilidades por medio de la interrogación directa a la persona o asesor, y después usar las situaciones de apuesta como una comprobación o prueba de la precisión de las probabilidades valoradas. Los dos métodos -interrogación directa y uso de las apuestas- se complementan el uno al otro; con el primero se proporciona el vehículo para la cuantificación del juicio y con el segundo el incentivo para lograr que esa cuantificación sea lo más precisa posible. Las probabilidades valoradas por el asesor mediante la interrogación directa nos dan alguna idea de que apuestas presentarle, para comprobar dichas probabilidades. Esto tiene el inconveniente de que si el asesor está enterado del procedimiento referido respecto al modo de presentar las apuestas, falsifique intencionadamente sus respuestas en la interrogación directa para recibir una elección de apuestas atractiva para él.

Winkler ha demostrado que los diferentes métodos pueden producir diferentes respuestas (8). Es decir, si consideramos K métodos distintos, podemos obtener las respuestas $r_{1j}, \ldots, r_{nj}$ (ó $r_j(x)$) por el método j-esimo, para $j = 1, 2, \ldots, K$. Mediante una selección apropiada de apuestas para presentar al asesor sería posible determinar que conjunto de respuestas se aproximan mejor a las $p_1, \ldots, p_n$ (ó $f(x)$) determinando qué conjunto de respuestas es consistente con las probabilidades obtenidas mediante las apuestas.

Una vez que hemos analizado el papel del asesor y la forma en que éste asigna sus probabilidades, es decir, cuantifica sus juicios, podemos deducir que el concepto de buen o mal asesor se puede tomar en dos contextos distintos. En primer lugar tenemos un criterio de "bondad" con respecto a la teoría personalista de la probabilidad. En este contexto, un buen asesor es el que obedece los postulados de coherencia y hace valoraciones que se corresponden con sus juicios es decir, hace $r(x)$ idéntico a $f(x)$. En segundo lugar podemos considerar otro criterio de "bondad" basado en las aplicaciones de la teoría. En este contexto, un "buen" asesor será el muy erudito en la materia que tiene que considerar. Esencialmente, el primer contexto se interesa por la experiencia en el área general de la valoración de la probabilidad, y el segundo se interesa por la experiencia en el área de aplicación. El primero requiere que las probabilidades se correspondan con el juicio, mientras el segundo requerirá que dichas probabilidades se correspondan con la realidad. Lógicamente, la situación ideal se daría cuando ambos criterios fueran satisfechos simultaneamente. Es decir, esta situación ideal requeriría la competencia del asesor tanto en el sentido de la valoración de la probabilidad como en el área de aplicación. Desafortunadamente esto no ocurre habitualmente. Si consideramos por ejemplo el caso del análisis del pronóstico del tiempo, un estadístico que está familiarizado con la teoría de la probabilidad personal puede ser capaz de hacer valoraciones coherentes de acuerdo con sus juicios, pero puede saber muy poco de metereología. Mientras que un metereólogo es un experto en su campo, pero no es tan habitual que entendiera a la vez la teoría subjetiva de la probabilidad. El estadístico satisface el primer criterio, pero no el segundo, mientras que el metereólogo satisface el segundo pero no el primero. La pregunta es entonces cúal de los dos es el más válido como asesor. En un sentido normativo, es decir, atendiendo a la coherencia, el estadístico es claramente el mejor asesor; pero realmente no es necesario hacer una elección entre los dos criterios de "bondad", ya que con alguna instrucción y práctica el metereólogo puede ser entrenado para usar los métodos de valoración de probabilidades (esto sería más fácil que hacer del estadístico un metereólogo competente), pues con esta instrucción el metereólogo satisfaría ambos criterios de "bondad".

En cualquier caso, es necesario considerar también el factor experiencia, pues gracias a ella ambos asesores elevaran su grado de competencia, al incrementarse su conocimiento de los métodos lo que reducirá el número de inconsistencias y dará al asesor la capacidad de entender la correspondencia entre juicios y probabilidades. Por otra parte, la experiencia también conduce a que el asesor cumpla mejor los criterios de "bondad" tanto en el primer sentido referido como en el segundo.

Después de analizar el problema de la cuantificación del juicio, pasamos a estudiar las axiomáticas que constituyen la base formal que garantice el comportamiento racional y coherente al que nos venimos refiriendo.

4.4.- Axiomáticas de la teoría de la probabilidad subjetiva.

Para presentar en este capítulo algunas de las axiomáticas fundamentales de la teoría que estamos tratando en este trabajo, seguiremos un orden cronológico, pues cada una de ellas hace, la mayor parte de las veces, referencias concretas a las de sus antecesores. A pesar de que consideramos esta forma de exposición cronológica como la más adecuada, no podemos dejar de señalar, como ya lo hemos hecho anteriormente, que la axiomática de L. J. Savage, expuesta en su obra "Foundations of Statistics", publicada en 1954, está considerada por casi todos los especialistas en esta materia como la formulación teórica más explícita y general.

4.4.1.- Axiomática de Bruno De Finetti (1931).

Según C. Villegas: "La primera formulación clara y precisa de los axiomas de la probabilidad cualitativa fué dada por De Finetti en "Sul significato soggetivo della probabilitá" en 1931" (9). Posteriormente De Finetti publica en 1937 su trabajo "La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives" (10). En estos dos trabajos el autor propone las leyes que ha de seguir la probabilidad tal y como él la concibe.

De Finetti no concibe la probabilidad como una noción abstracta, sino que la supone una idea elemental entroncada a la vida diaria, esto es, como una noción práctica aplicable a la vida cotidiana. Según está elemental apreciación, es posible suponer un suceso bien definido pero que nos plantea duda sobre su ocurrencia o no ocurrencia. Esta incertidumbre acerca de su ocurrencia obliga al autor a definir dos términos, la comparación y la graduación de la incertidumbre de esos sucesos. La comparación la establece con la relación "más probable que" y la graduación consiste en una valoración cuantitativa y directa del grado de probabilidad atribuido por un individuo al suceso.

De Finetti comienza estableciendo cuatro postulados para la relación comparativa "más probable que". Estos postulados son:

1. Un suceso incierto puede ser igualmente probable, más probable o menos probable que otro.

2. Un suceso incierto siempre será más probable que un suceso imposible y menos probable que un suceso seguro.

3. Si un suceso E' es más probable que otro E y éste último es más probable que otro suceso E'', entonces E' será más probable que E'' (propiedad transitiva).

4. Si E_1 es más probable que E_2 y E'_1 es más probable que E'_2 entonces resulta que:

$$E_1 \vee E'_1 \text{ es más probable que } E_2 \vee E'_2$$

Es decir que la relación "más probable que" se conserva con la suma lógica o disjunción $\vee$, con tal que los sucesos E_1 y E'_1 sean incompatibles, y E_2, E'_2 sean también incompatibles.

En cuanto a la definición cuantitativa y directa del grado de probabilidad es decir lo que el autor llama la graduación de la incertidumbre, De Finetti considera que es asignada por un individuo a un suceso dado de tal manera que con ello expresa las condiciones por las que estaría dispuesto a apostar por la ocurrencia del suceso.

La evaluación de las probabilidades por parte del individuo requiere que no existan contradicciones intrínsecas entre ellas, es decir, requiere la coherencia del individuo. Es precisamente esta condición de coherencia la que constituye el único principio del que se puede deducir el cálculo general de la probabilidad desarrollando un conjunto de reglas a las que debe ajustarse la evaluación subjetiva de la probabilidad de varios sucesos por un mismo individuo, si no quiere que exista una contradicción fundamental entre ellas.

Una de estas reglas del cálculo general de la probabilidad lo constituye el teorema de la probabilidad de la suma lógica de sucesos, teorema que pasamos a demostrar siguiendo a De Finetti:

Sean $E_1, \ldots, E_n$ una clase completa de sucesos incompatibles, de los cuales uno y sólo uno puede ocurrir. Y sean $p_1, \ldots, p_n$ las probabilidades de esos sucesos valoradas por un individuo dado. Si $S_1, \ldots, S_n$ son los premios -positivos o negativos- que corresponden a la ocurrencia de cada uno de los sucesos, las ganancias en los n casos posibles (hay tantos casos posibles como sucesos pueden ocurrir) serán las diferencias entre el premio de la apuesta ganada si ocurre el suceso correspondiente y la suma de los n desembolsos pagados.

Con estas condiciones De Finetti demuestra que:

"La suma de las probabilidades de dichos sucesos debe ser igual a 1 y de forma más general que la probabilidad de la suma lógica de los n sucesos es igual a la suma de sus probabilidades".

La demostración propuesta por De Finetti en los artículos antes citados es la siguiente:

Llamando G_k , a la ganancia proporcionada por la apuesta k , por lo que hemos comentado antes G_k será:

$$G_k = S_k - \sum_{1 \equiv 1}^{n} P_i \cdot S_i \qquad [1]$$

Considerando los S_k como incógnitas se obtiene un sistema de n ecuaciones lineales

$$G_1 = S_1 - P_1 S_1 - P_2 S_2 - \ldots - P_n S_n =$$

$$= S_1 (1-P_1) - P_2 S_2 - \ldots - P_n S_n$$

$$G_2 = S_2 - P_1 S_1 - P_2 S_2 - \ldots - P_n S_n =$$

$$= - P_1 S_1 + (1-P_2) S_2 - \ldots - P_n S_n$$

....

....

$$G_n = S_n - P_1 S_1 - P_2 S_2 - \ldots - P_n S_n =$$

$$= - P_1 S_1 - P_2 S_2 - \ldots + (1-P_n) S_n$$

cuyo determinante es

$$\begin{vmatrix} (1-P_1) & -P_2 & \dots & -P_n \\ -P_1 & (1-P_2) & \dots & -P_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -P_1 & -P_2 & \dots & (1-P_n) \end{vmatrix} = 1 - (P_1 + \dots + P_n)$$

Si este determinante es distinto de 0 , se pueden fijar los S_k de tal forma que los G_k tengan valores arbitrarios, todos positivos, en contra de la condición de coherencia. Por tanto, la coherencia obliga a imponer la condición de que el determinante se igual a 0 , es decir,

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$$

Esta condición necesaria para la coherencia es también suficiente, puesto que si se satisface se tiene la identidad siguiente, cualquiera que sean los S_k :

$$\sum_{k=1}^{n} P_k \cdot G_k = 0$$

Vamos a deducir esta identidad

$G_k = S_k - \sum_i P_i S_i$ es la igualdad [1] multiplicando por P_k obtenemos

$$P_k\ G_k = P_k\ S_k - P_k \sum_i P_i\ S_i$$

y sumando estos términos en k

$$\sum_{k=1}^{n} P_k\ G_k = \sum_k P_k\ S_k - \sum_k P_k \sum_i P_i\ S_i$$

pero $\sum_k P_k = 1$, por tanto

$$\sum_{k=1}^{n} P_k\ G_k = \sum_{k=1}^{n} P_k\ S_k - \sum_{i=1}^{n} P_i\ S_i = 0$$

y los G_k no pueden ser todos positivos, con lo que queda demostrada la condición.

Las probabilidades p_1 , ... , p_n corresponden a la opinión coherente de un individuo, y la teoría no puede rechazar a priori ninguno de estos juicios al menos que la suma de las probabilidades atribuidas no sea igual a la unidad.

En cuanto a las probabilidades valoradas cuantitativamente De Finetti argumenta también que tiene los elementos necesarios para poder definir formalmente la probabilidad condicionada, escribiendo:

probabilidad de E condicionada por $E' = \frac{P(E.E')}{P(E')}$

y de este resultado se deduce el teorema de la probabilidad del producto lógico de sucesos

$$P\,(E.E') = P(E)\;P(E/E')$$

indicando por $P(E/E')$ la probabilidad de E condicionada por E' y con $E.E'$ indica el producto lógico de los sucesos E y E'.

4.4.2 - La axiomática de Bernard Osgood Koopman (1940).

Bernard O. Koopman utiliza el término de probabilidad intuitiva en lugar de probabilidad subjetiva y expone que la tesis intuitiva de la probabilidad se mantiene tanto por su significado como por las leyes que obedece ya que la probabilidad se deduce directamente de la intuición y existe antes que la experiencia objetiva, utilizando la palabra "objetiva" en sentido estricto, es decir, prácticamente equivalente a un "experimento de laboratorio", incluso afirma que las llamadas definiciones objetivas de la probabilidad dependen, para su aplicación efectiva a casos concretos, de su traducción en los términos de la probabilidad intuitiva.

Koopman al intentar la formulación axiomática de la idea de probabilidad intuitiva (11) toma como punto de partida un número comprendido entre 0 y 1 , correspondiente al grado de creencia racional. Pero el desarrollo de la teoría de Koopman se basa en las comparaciones de probabilidades intuitivas, que obedecen leyes fijas análogas a las leyes de la lógica intuitiva, basandose, a su vez, en el conocimiento que el hombre tiene de su propio proceso racional.

Cuando la intuición se aplica a una situación que conlleva sucesos inciertos se pueden cumplir dos funciones, en primer lugar se formulan comparaciones de la probabilidad intuitiva y en segundo lugar se establecen leyes de consistencia que dirijan tales comparaciones. A partir de las leyes de consistencia se construye una teoría (este es el objetivo que persigue Koopman) con la cual las comparaciones de la probabilidad intuitiva -y por tanto los valores de la probabilidad numérica- puedan facilitarnos la construcción de unas comparaciones a través de otras.

Koopman, desde el punto de vista de la intuición, propone unos axiomas que constituyen las leyes de consistencia que gobiernan todas las comparaciones de la probabilidad. A partir del punto de vista de la matemática estos axiomas son los postulados formales que satisface la relación "igual ó menos probable que", que representaremos con el signo $\prec$, los cuales son aceptados convencionalmente. Estos axiomas constituyen una base teórica suficiente para configurar la teoría de la probabilidad intuitiva. Antes de exponer estos axiomas, empezaremos por explicar la notación de este autor:

- a, b, h, k, representan proposiciones
- $a/h \prec b/k$ o bien $b/k \succ a/h$ (I) se leen así; "a, en el supuesto de que h es verdadera, es igual o menos probable que b , en el supuesto de que k es verdadera".
- A los simbolos a/h y b/k se les llama conjeturas o eventualidades. A las proposiciones a y b se les llama contingencias, es decir, proposiciones que pueden ocurrir o no ocurrir en las eventualidades, y las proposi

ciones h y k son los supuestos en las eventualidades.

- Una expresión como la (I) es una "comparación de probabilidad" que podemos leer abreviadamente así:

  $a/h \prec b/k$: a sobre h es infraprobable a b sobre k.

  o bien

  $b/k \succ a/h$: b sobre k es supraprobable a a sobre h.

Con la notación expuesta y suponiendo que esté definido el anillo de BOOLE de las proposiciones, pasamos a formular los axiomas propuestos por Koopman.

1.- Axioma de la contingencia verificada (V)

$$a/h \prec k/k$$

2.- Axioma de implicación (I)

Si $a/h \succ K/k$ entonces $h \subset a$

3.- Axioma de reflexividad (R)

$$a/h \prec a/h$$

4.- Axioma de transitividad (T)

Si $a/h \prec b/k$ y $b/k \prec c/l$ entonces

$a/h \prec c/l$

5.- Axioma de antisimetría (A)

Si $a/h \prec b/k$ entonces $\sim a/h \succ \sim b/k$

donde " $\sim a$" significa "negación de a" e igualmente " $\sim b$" significa "negación de b".

6.- Axiomas de composición (C)

Sean $a_1\, b_1\, h_1 \neq 0$ y $a_2\, b_2\, h_2 \neq 0$

donde "0" es el elemento unitario del anillo de Boole de las proposiciones respecto de la operación disjunción que representamos por $\vee$, es decir, $a \vee 0 = a$.

Entre las proposiciones que están representadas por letras escritas unas a continuación de otras se realiza la operación conjunción que simbolicamente se representa por el signo . , y que en esta escritura se ha omitido.

C(1) Si $a_1/h_1 \prec a_2/h_2$ y $b_1/a_1h_1 \prec b_2/a_2h_2$

entonces:

$$a_1\ b_1/\ h_1 < a_2\ b_2/\ h_2$$

C(2) Si $a_1/h_1 < b_2/a_2h_2$ y $b_1/a_1h_1 < a_2/h_2$

entonces:

$$a_1\ b_1/\ h_1 < a_2\ b_2/\ h_2$$

7.- Axioma de descomposición (D)

(Cuasi-inverso de (C))

Sean $a_1\ b_1\ h_1 \neq 0$, $a_2\ b_2\ h_2 \neq 0$ y

$$a_1\ b_1/\ h_1 < a_2\ b_2/\ h_2$$

entonces si cualquiera de las dos conjeturas:

a_1/h_1 , $b_1/a_1\ h_1$ es supraprobable ($>$) con respecto a cualquiera de las dos siguientes

a_2/h_2 , $b_2/a_2\ h_2$, la otra conjetura de la primera pa reja es infraprobable ($<$) a la otra conjetura de la se gunda pareja, es decir:

Si $a_1/h_1 > a_2/h_2$ entonces

$b_1/a_1\ h_1 < b_2/a_2\ h_2$, etc...

8.- Axioma del supuesto alternativo (P)

Si $a/bh \prec r/s$ y $a/\sim bh \prec r/s$ entonces

$a/h \prec r/s$

Obsérvese que $\sim bh$ es igual a $(\sim b).h$, es decir, que la negación sólo afecta a la proposición $\underline{b}$.

9.- Axioma de subdivisión (S)

Sean las proporciones a_1 , a_2 , ... , a_n , b_1 , ... , b_n para cualquier entero $\underline{n}$, tal que $a_i\ a_j = b_i\ b_j = 0\ (i \neq j)$;

$i,j = 1 , \ldots , n$; $a = a_1 \vee \ldots \vee a_n \neq 0$;

$b = b_1 \vee \ldots \vee b_n \neq 0$;

$a_1/ a \prec \ldots \prec a_n / a$; $b_1/ b \prec \ldots \prec b_n/ b$;

entonces

$$a_1/ a \prec b_n/ b$$

4.4.3.- Axiomática de Leonard J. Savage (1954).

Formulamos en este epígrafe la axiomática considerada fundamental por la gran mayoría de los partidarios de la teoría personalista o subjetiva de la probabilidad. Dicha axiomática fué expuesta por Savage en su obra The Foundations of Statistics, publicada en 1954. El propio Savage declara acerca de su obra que:

> "Presenta una teoría de los fundamentos de la estadística que está basada en el punto de vista personalista de la probabilidad, deducido principalmente del trabajo de Bruno De Finetti, 'La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives'" (12).

Savage también afirma que: "la teoría mostrada tiene implicaciones (...) con la teoría de la utilidad debida, en su forma moderna, a Von Neumann y Morgenstern" (13).

Esta implicación con la teoría de la utilidad la recoge Savage de la obra de esos autores Theory of Games and Economic Behavior (14).

Para exponer su teoría, Savage parte de la idea del comportamiento de una persona "racional" en la toma de decisiones. Esta racionalidad de la persona se refiere a los comportamientos de coherencia y consistencia, así como de idealidad, términos que hemos estado manejando en epígrafes anteriores.

Savage empieza definiendo los siguientes términos utilizados en su teoría:

> "La naturaleza es el objeto en el que la persona está interesada.
>
> Un estado de la naturaleza es una descripción concreta de dicha naturaleza, y en esta descripción no se puede dejar ningún aspecto relevante sin describir.
>
> El estado verdadero (de la naturaleza) es el estado que de hecho se obtiene, es decir, la descripción verdadera de la naturaleza" (15)

Establecemos a continuación la notación de los elementos utilizados por este autor en su axiomética, respetando, como venimos haciendo con otros autores y haremos en los siguientes, las notaciones originales usadas por ellos.

S es el conjunto de los estados de la naturaleza
s , s' ... son elementos de S, y si escribimos
$s \in S$ queremos decir que s es un estado.

A, B, C ... son sucesos, es decir, A, B, C, ... son subconjuntos de S y escribiremos $A, B, C, \ldots \subset S$.

Un suceso es un conjunto de estados, y si escribimos $s \in A$, es decir, s es un elemento de A , esto significa que s es un estado en A.

$\sim A$ es el complementario de A respecto de S

$\bigcup_i A_i$ es el conjunto de aquellos elementos de S que pertenecen al menos a uno de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots$

$\bigcap_i A_i$ es el conjunto de los elementos de S que pertenecen a cada uno de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots$

S es el conjunto universal

ϕ es el conjunto vacio

Otros términos usados por Savage en su axiomática son las consecuencias, acciones y decisiones, que él mismo define así:

> "Una decisión se hace cuando hay dos o más acciones para elegir o decidir. Para decidir una acción hay que tener en cuenta los posibles estados de la naturaleza, y también las consecuencias implícitas en cada acción para cada posible estado de la naturaleza. Una consecuencia es algo que puede ocurrir a la persona" (16).

Estas consecuencias, tal y como las define Savage, pueden referirse a dinero, salud, o algo en lo que la persona esté interesada. El conjunto de las consecuencias lo representa este autor por la letra F, y las consecuencias particulares por: $f, g, h, \ldots$

Una acción es una función que logra una consecuencia con cada estado de la naturaleza. Las acciones son denotadas por Savage mediante los simbolos $\bar{f}$, $\bar{g}$, $\bar{h}$, ... (la simbología exacta del autor consiste en la utilización de los mismos símbolos que para las consecuencias particulares, pero en letras negritas. Ante la imposibilidad de utilizar este tipo de impresión, hemos optado por la expuesta). Pensamos que Savage utiliza esta notación para dejar implícito con ello que una acción puede identificarse con sus posibles consecuencias (de ahí nuestro interés en encontrar una notación que respete al máximo esta idea). Si consideramos una acción $\bar{f}$ ésta es una función que logra la consecuencia $\bar{f}(s) \in F$ con el estado s . El conjunto de todas las acciones posibles será representado por $\bar{F}$ (lo representamos de esta forma por las mismas razones que hemos expuesto para la notación de las acciones particulares). Las acciones son funciones arbitrarias definidas del conjunto de los estados S en el conjunto de las consecuencias F .

Otro término utilizado por el autor en esta axiomática y que es necesario explicar es la relación entre acciones "no es preferido a" y que Savage representa con el símbolo $\leq$. Es conveniente trabajar con la relación "no es preferido a" ya que es directamente la complementaria de la relación "es preferido a", que se representa simbolicamente por $>$. Por tanto, si decimos que es imposible que: $\bar{f}$ es preferida a $\bar{g}$ y a la vez $\bar{g}$ es preferida a $\bar{f}$ entonces esto es equivalente a decir que $\bar{f}$ no es preferida a $\bar{g}$ o $\bar{g}$ no es preferida a $\bar{f}$. Observemos que para poder afirmar esta equivalencia lógica estamos aplicando las leyes de Morgan de la lógica proposicional mediante las cuales podemos escribir:

$$\sim [(\bar{f} > \bar{g}) \wedge (\bar{g} > \bar{f})] \equiv (\bar{f} \leq \bar{g}) \vee (\bar{g} \leq \bar{f})$$

siendo $\wedge$ y $\vee$ las operaciones de conjunción y disjunción entre proposiciones que nosotros podemos establecer también entre las acciones, y donde $\sim$ se utiliza para negar cualquier proposición.

También la definición de preferencia sugiere que si $\bar{f}$ no es preferida a $\bar{g}$, y $\bar{g}$ no es preferida a $\bar{h}$ entonces es imposible que $\bar{f}$ sea preferida a $\bar{h}$, o lo que es lo mismo $\bar{f}$ no es preferida a $\bar{h}$. Simbólicamente escribiríamos esta condición del siguiente modo:

$$\bar{f} \leq \bar{g} \quad \text{y} \quad \bar{g} \leq \bar{h}$$

entonces: $\bar{f} \leq \bar{h}$

La formulación de esta condición constituye la propiedad transitiva que satisface la relación "no es preferido a".

Recogiendo las dos propiedades satisfechas por dicha relación "no es preferido a" , que son:

1. $\bar{f} \leq \bar{g}$ ó $\bar{g} \leq \bar{f}$

2. $\bar{f} \leq \bar{g}$ y $\bar{g} \leq \bar{h}$

entonces

$\bar{f} \leq \bar{h}$

Podemos decir que dicha relación es un orden débil entre las acciones. Con lo que se formula el PRIMER POSTULADO de la axiomática de Savage:

POSTULADO 1. La relación $\leq$ "no es preferido a" es un orden débil entre las acciones.

Otro de los supuestos de la teoría de Savage es el principio de la cosa segura que formalmente establece así:

Si una persona no prefiere $\bar{f}$ a $\bar{g}$, bien sabiendo que ha ocurrido el suceso B o sabiendo que ha ocurrido el suceso $\sim B$, entonces no prefiere $\bar{f}$ a $\bar{g}$ ($\bar{f} \leq \bar{g}$).

Además, con tal de que el suceso B no sea prácticamente imposible, si definitivamente prefiere $\bar{g}$ a $\bar{f}$ sabiendo que ha ocurrido B y si no prefiere $\bar{f}$ a $\bar{g}$ sabiendo que no ha ocurrido B , entonces definitivamente prefiere $\bar{g}$ a $\bar{f}$.

Esto nos lleva a definir $\bar{f} \leq \bar{g}$ dado B .

DEFINICION 1 . $\bar{f} \leq \bar{g}$ dado B , si y sólo si $\bar{f}' \leq \bar{g}'$ para todo $\bar{f}'$ y $\bar{g}'$ que coinciden con $\bar{f}$ y $\bar{g}$ respectivamente, en B , y que coincidan mútuamente ($\bar{f}$ con $\bar{g}$ y $\bar{f}'$ con $\bar{g}'$) en $\sim$B, y $\bar{g}' \leq \bar{f}'$ bien para todos los pares o para ninguno de ellos.

Con esta definición podemos establecer el segundo postulado:

POSTULADO 2. : Para todo $\bar{f}$, $\bar{g}$ y B , $\bar{f} \leq \bar{g}$ dado B ó $\bar{g} \leq \bar{f}$ dado B.

Antes de pasar al tercer postulado necesitamos establecer dos definiciones previas.

DEFINICION 2. : Esta definición establece la relación formal de preferencia entre consecuencias y puede expresarse así:

Para cualesquiera consecuencias g y g'

$g \leq g'$ si y sólo si $\bar{f} \leq \bar{f}'$ cuando

$\bar{f}(s) = g$ y $\bar{f}'(s) = g'$ para todo $s \in S$

DEFINICION 3. : El suceso B es prácticamente imposible o nulo si y sólo si $\bar{f} \leq \bar{g}$ dado B para todo $\bar{f}$ y $\bar{g}$.

> **POSTULADO 3.** : Si $\bar{f}(s) = g$, $\bar{f}(s) = g'$ para todo $s \in B$ y B no es nulo, entonces $\bar{f} \leq \bar{f}'$ dado B si y sólo $g \leq g'$

DEFINICION 4. : $A \leq B$ si y sólo si $\bar{f}_A \leq \bar{f}_B$ ó $g \leq g'$ para todo $\bar{f}_A$, $\bar{f}_B$, g , g' tal que $\bar{f}_A(s) = g$ para $s \in A$, $\bar{f}_A(s) = g'$ para $s \in \sim A$, $\bar{f}_B(s) = g$ para $s \in B$, $\bar{f}_B(s) = g'$ para $s \in \sim B$.

Usando esta definición Savage formula el siguiente postulado

> **POSTULADO 4.** : Para todo A , B
> $A \leq B$ ó $B \leq A$

> **POSTULADO 5.** : Es falso que para todo f , f' sea $f \leq f'$ o, dicho de otra forma, existen al menos un par de consecuencias f , f' tales que $f' > f$.

Las implicaciones que pueden deducirse de estos cinco primeros postulados nos llevan a las conclusiones que establecemos en la definición y teorema siguientes:

DEFINICION 5. : Una relación $\leq\cdot$ entre sucesos es una probabilidad cualitativa si y sólo si para cualesquiera sucesos A, B, C, se cumple:

1. $\leq\cdot$ es un orden débil
2. $A \leq\cdot B$ si y sólo si $A \cup C \leq\cdot B \cup C$ con tal que $A \cap C = B \cap C = \phi$
3. $\phi \leq\cdot A$ y $\phi <\cdot S$

TEOREMA 1. : La relación $\leq$ aplicada a los sucesos es una probabilidad cualitativa y $\leq$ significaría "no más probable que" .

Savage utiliza el mismo símbolo para la relación "no más probable que" entre sucesos que para la relación "no es preferida a" entre acciones.

POSTULADO 6. : Supongamos que es falso que $\bar{g} \leq \bar{h}$ entonces para toda consecuencia f existe una partición finita de S tal que, si $\bar{g}'$ coincide con $\bar{g}$ y $\bar{h}'$ coincide con $\bar{h}$ excepto en un elemento arbitrario de la partición, y $\bar{g}'$ y $\bar{h}'$ tienen la misma consecuencia f en ese elemento de la partición, entonces será falso que $\bar{g}' \leq \bar{h}$ ó $\bar{g} \leq \bar{h}'$ (Por tanto será verdader $\bar{g} > \bar{h}'$ y $\bar{g}' > \bar{h}$).

DEFINICION 6. : $\bar{f} \leq g$ dado B ($g \leq \bar{f}$ dado B) si y sólo si $\bar{f} \leq \bar{h}$ dado B ($\bar{h} \leq \bar{f}$ dado B) cuando $\bar{h}(s) = g$ para todo s .

POSTULADO 7. : Si $\bar{f} \leq \bar{g}(s)$ dado B ($\bar{g}(s) \leq \bar{f}$ dado B) para todo $s \in B$ entonces $\bar{f} \leq \bar{g}$ dado B ($\bar{g} \leq \bar{f}$ dado B)

Debido a que los axiomas de Savage son complicados desde el punto de vista formal, vamos a describir su contenido intuitivo. Insistimos en que los axiomas se establecen con preferencias entre las decisiones, y las decisiones son funciones del conjunto de los estados de la naturaleza en el conjunto de las consecuencias. Los axiomas se establecen de tal manera que cualquiera que los satisfaga maximizará su utilidad esperada. Esto significa que la forma en que satisface los axiomas generará una distribución de probabilidad subjetiva acerca de sus creencias respecto al estado verdadero de la naturaleza, y una función de utilidad sobre el conjunto de las consecuencias, tal que la expectativa de una decisión dada se define con respecto a la distribución de probabilidad subjetiva sobre los estados de la naturaleza, y la función de utilidad se define sobre el conjunto de las consecuencias.

Savage establece en su primer postulado que la preferencia entre las decisiones sea transitiva, y que dadas dos decisiones cualesquiera una es al menos preferida débilmente a la otra.

El postulado dos extiende este supuesto orden débil para que se cumpla cuando el dominio de definición de las decisiones se restringe a un conjunto B de estados de la naturaleza dados, ya que el decisor podría saber que el estado verdadero de la naturaleza está en algún subconjunto del conjunto total.

El postulado tres afirma que el conocimiento de un suceso no puede cambiar las preferencias entre las consecuencias, donde las preferencias entre las consecuencias son definidas en términos de preferencias entre las decisiones.

El postulado cuatro afirma que dados dos conjuntos de estados de la naturaleza cualesquiera, es decir, dos sucesos cualesquiera, uno es al menos tan probable como el otro, con esta condición la probabilidad cualitativa entre sucesos es fuertemente conexa.

El postulado cinco excluye el caso trivial en el cual todas las consecuencias fueran equivalentes en utilidad, y por tanto que toda decisión fuera equivalente a cualquier otra decisión. Es decir, todas las consecuencias no son igualmente preferidas.

El <u>postulado seis</u> establece, puesto que la relación de preferencia entre decisiones induce la relación "no más probable que" entre sucesos, que si un suceso A no es más probable que un suceso B (A y B son subconjuntos del mismo conjunto de estados de la naturaleza) entonces existe una partición del conjunto de los estados de la naturaleza tal que la unión de cada elemento de la partición con A no es más probable que B).

El <u>postulado siete</u> es una formulación del principio de la cosa segura.

Resumiendo, Savage establece la relación de orden débil "no es preferido a" entre las acciones, y a continuación la misma relación supuesto que ocurre un suceso determinado. Dicha relación se establece de la misma forma entre las consecuencias, supuesto que ocurre ese suceso. Con esta relación de preferencia entre las decisiones y las consecuencias induce la relación de orden débil "no más probable que" entre los sucesos y esta última es una probabilidad cualitativa sobre los sucesos.

4.4.4.- Axiomática de F. J. Anscombe y R. J. Aumann (1963).

Anscombe y Aumann consideran el concepto de probabilidad subjetiva o personal de Ramsey y Savage, y de acuerdo con este concepto definen las probabilidades subjetivas y las utilidades en términos de las preferencias de una persona, siempre que estas preferencias satisfagan ciertos supuestos de consistencia, es decir, dichas probabilidades y utilidades pueden determinarse a partir de las preferencias observadas. Las utilidades son definidas por estos autores, al igual que Savage, a partir de la teoría de Von Neumann y Morgenstern.

Anscombe y Aumann (17) comienzan estableciendo un conjunto $\mathcal{A}$ de premios, y una lotería sobre dicho conjunto $\mathcal{A}$. Una lotería es un recurso para decidir qué premio de $\mathcal{A}$ se recibirá si tiene lugar una observación de un conjunto de sucesos mutuamente excluyentes y exhaustivos. En primer lugar, estos autores consideran que los sucesos pueden tener asociadas probabilidades conocidas y, por otra parte, que dichos sucesos pueden no tener probabilidades asociadas o bien que los valores de tales probabilidades sean desconocidos. El primer caso correspondiente a sucesos con probabilidades asociadas es comparado en esta axiomática con los sucesos que pueden observarse haciendo girar una sóla vez una ruleta; el segundo caso, correspondiente a sucesos sin probabilidades asignadas o bien con probabilidades desconocidas, es comparado con las observaciones que se pueden obtener en una carrera de caballos. Esto nos lleva a distinguir dos tipos de loterías: el primer tipo identificable con una "lotería de ruleta" y el segundo identificable con una "lotería de caballos". La "lotería de caballos" está basada en una sola carrera de caballos. El objetivo de Anscombe y Aumann es definir las probabilidades subjetivas asociadas a cada uno de los resultados posibles de esta carrera de caballos.

Además de las loterías simples a las que acabamos de hacer referencia podemos considerar también loterias compuestas que se construirían a partir de loterías simples; una lotería compuesta es una lotería cuyos premios son otras loterías. Las utilidades de Von Neumann-Morgenstern para los premios básicos se construyen a partir de las comparaciones de preferencias entre loterías de ruleta compuestas, y las probabilidades subjetivas de los resultados de la carrera de caballos se construyen a partir de las comparaciones de preferencias entre loterías que están compuestas a partir de loterías de caballos y ruleta.

Para establecer las utilidades de las loterías de ruleta basadas en el conjunto de premios $\mathcal{A}$, es conveniente suponer que entre todos los premios hay uno más deseado que representaremos por A_1, y un premio menos deseado que representaremos por A_o, por tanto, lógicamente, A_1 es definitivamente preferido a A_o, que simbólicamente se escribirá $A_1 \succ A_o$, y para cualquier premio A se cumple las dos relaciones siguientes de preferencia-indiferencia:

$$A_1 \succ A \qquad y \qquad A \succ A_o$$

La notación utilizada para las loterías de ruleta es la siguiente: $(f_1\ B_1\ , \dots\ , f_k\ B_k)$ (I) representa a la lotería de ruleta que ofrece el premio B_1 con probabilidad f_1 , B_2 con probabilidad f_2 , etc., siendo la suma de las probabilidades f_i igual a la unidad.

Si consideramos el conjunto $\mathcal{R}$ de todas las loterías de ruleta (simples o compuestas) con premios en $\mathcal{A}$, y donde se ha establecido un orden de preferencias en $\mathcal{R}$ que satisface los axiomas de la lotería de la utilidad, entonces es posible definir una función de utilidad u sobre $\mathcal{R}$, que además de cumplir las propiedades usuales satisface las condiciones siguientes:

1. Para cada premio A puede establecerse un número u(A) llamado utilidad de A .
2. Si $B_1\ , \dots\ , B_k$ son algunos premios elegidos del conjunto de premios $\mathcal{A}$, la lotería de ruleta simple $(f_1\ B_1\ , \dots\ , f_k\ B_k)$ tiene utilidad:

$$\mathbf{u}\,(f_1\ B_1\ ,\dots\ , f_k\ B_k) = f_1\ \mathbf{u}(B_1) + \dots + f_k\ \mathbf{u}(B_k)$$

3. El orden de preferencias sobre $\mathcal{R}$ es isomorfo con el orden numérico de las utilidades correspondientes

y podemos normalizar la función de utilidad para que

$$\mathfrak{u}(A_1) = 1 \qquad y \qquad \mathfrak{u}(A_0) = 0$$

Respecto a la carrera de caballos referida anteriormente supongamos que tiene s resultados posibles mútuamente excluyentes y exhaustivos, representados por $h_1, \ldots, h_s$. Supongamos ahora la lotería compuesta que consiste en que los premios de la lotería de caballos son loterías de ruleta, es decir, si tenemos s loterías de ruleta $R_1, \ldots, R_s$ como elementos de $\mathcal{R}$, entonces el símbolo $[R_1, \ldots, R_s]$ representa a la lotería de caballos compuesta que ofrece el premio R_1 si el resultado de la carrera es h_1; R_2 si el resultado de la carrera es h_2, etc. El conjunto de tales loterías de caballos compuestas se representará por $\mathcal{H}$.

Sea, ahora, $\mathcal{R}^*$ el conjunto de todas las loterías de ruleta cuyos premios son las loterías de caballos compuestas que acabamos de referir, es decir, los premios son elementos de $\mathcal{H}$, en lugar de elementos de $\mathcal{A}$.

El recurso de la teoría de Anscombe y Aumann para asignar probabilidades subjetivas a los resultados de la lotería de caballos consiste en aplicar la teoría de la utilidad dos veces, y relacionar los dos sistemas de preferencias y utilidades de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^*$. Es decir, tenemos un orden de preferencias sobre $\mathcal{R}$ que produce la función de utilidad u sobre $\mathcal{R}$. Supongamos también que tenemos un orden de preferencias sobre $\mathcal{R}^*$, que satisface los axiomas de la teoría de la utilidad, siendo los premios en este caso elementos de $\mathcal{H}$, en lugar de elementos de $\mathcal{A}$. Representaremos esa relación de preferencia sobre $\mathcal{R}^*$ por $\succcurlyeq^*$, y la función de utilidad sobre $\mathcal{R}^*$ por $\mathcal{U}^*$. Relacionamos entonces los dos sistemas de preferenicas y utilidades entre los elementos de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^*$ mediante los dos supuestos siguientes:

<u>Supuesto</u> 1 . (monotonía de los premios)

Si $R_i \succcurlyeq R'_i$ entonces

$$[R_1 ,\dots, R_i ,\dots, R_s] \succcurlyeq^* [R_1 ,\dots, R'_i ,\dots, R_s]$$

Observemos que R_i , R'_i son loterías de ruleta y a su vez premios de las loterías de caballos compuestas, y éstas últimas son elementos de $\mathcal{H}$ y $[R_1 ,\dots, R_i ,\dots, R_s]$ y $[R_1 ,\dots, R'_i ,\dots, R_s]$ son loterías de caballos compuestas y a su vez premios de la lotería de ruleta, siendo ésta última un elemento de $\mathcal{R}^*$. Por tanto, hemos establecido la condición de monotonía entre los premios de loterías de $\mathcal{R}^*$. Observemos también que R_i es el premio ofrecido si ocurre el resultado h_i de una lotería de caballos, y R'_i es el premio ofrecido si ocurre el resultado h'_i de otra lotería de caballos.

<u>Supuesto</u> 2 . Inversión del orden en loterías compuestas.

$$(f_1 [R_1^1 ,\dots, R_s^1] , \dots , f_k [R_1^k ,\dots, R_s^k])$$

$$\sim * [(f_1 R_1^1 ,\dots, f_k R_1^k) ,\dots, (f_1 R_s^1 ,\dots, f_k R_s^k)]$$

El supuesto 1 formula que si dos loterías de caballos compuestas son idénticas excepto para los premios asociados a un resultado (el resultado i-ésimo, que es h_i para una lotería de caballos, y h_i' para la otra lotería), entonces la preferencia entre las loterías de caballos está regida por la preferencia entre los premios asociados con dicho resultado i-ésimo.

El supuesto 2 formula que si el premio que recibimos va a estar determinado por las siguientes cosas: una carrera de caballos y el giro de una ruleta, entonces no importa si se realiza el giro de la ruleta antes o después de la carrera de caballos. El símbolo $\sim *$ indica indiferencia. Observemos que

$$(f_1 [R_1^1 ,\dots, R_s^1] ,\dots, f_k [R_1^k ,\dots, R_s^k])$$

es una lotería de ruleta cuyos premios son loterías de caballos compuestas, es decir, el elemento que acabamos de escribir es un elemento de $\mathcal{R}^*$ con notación análoga a la que escribimos en (I).

Los supuestos 1 y 2 reflejan la idea intuitiva de que el resultado de la carrera de caballos no se ve afectado por ningún giro de la ruleta ni a la inversa.

A partir del supuesto 1 se deduce que $[A_1, \ldots, A_1]$ es la lotería de caballos más deseada y $[A_0, \ldots, A_0]$ es la lotería de caballos menos deseada. Normalizando la función de utilidad $\mathfrak{U}^*$ sobre $\mathcal{R}^*$ para que $\mathfrak{U}^*[A_1, \ldots, A_1] = 1$ y $\mathfrak{U}^*[A_0, \ldots, A_0] = 0$, establecemos el siguiente teorema, propuesto por Anscombe y Aumann, que nos garantiza la existencia de las probabilidades subjetivas correspondientes a los resultados de la carrera de caballos.

TEOREMA :

Existe un conjunto de números no negativos y únicos $p_1, \ldots, p_s$ cuya suma es 1, tal que para todo

$$[R_1, \ldots, R_s] \text{ de } \mathcal{H}$$

$$\mathfrak{U}^*[R_1, \ldots, R_s] = p_1 \cdot \mathfrak{U}(R_1) + \ldots + p_s \cdot \mathfrak{U}(R_s)$$

El número p_i es llamado probabilidad subjetiva del resultado h_i de la carrera.

A partir de este teorema resulta que $\mathfrak{U}^*[R, \ldots, R] = u(R)$ por tanto, identificamos $[R, \ldots, R]$ con R y las preferencias constituyen un orden débil definido sobre todas las loterías.

Observemos que escribimos, en el teorema expuesto, $\mathcal{U}^* [R_1, \ldots, R_s]$ porque $[R_1, \ldots, R_s]$ es el premio de una lotería de ruleta que es elemento de $\mathcal{R}^*$, a su vez $R_1, \ldots, R_s$ son premios de una lotería de caballos compuesta, pero $R_1, \ldots, R_s$ son también loterías de ruleta que son elementos de $\mathcal{R}$, por esto escribimos $u(R_1), \ldots, u(R_s)$. Como convencionalmente representamos por $[R_1, \ldots, R_s]$ a una lotería de caballos compuesta, esto significa que la lotería ofrece:

R_1 , si ocurre h_1 , con probabilidad p_1

R_2 , si ocurre h_2 , con probabilidad p_2

....

R_s , si ocurre h_s , con probabilidad p_s

Siendo $p_1, \ldots, p_s$ las probabilidades subjetivas de los resultados de la carrera de caballos $h_1, \ldots, h_s$.

Si el método de Anscombe y Aumann que acabamos de exponer se aplicara a un conjunto de resultados excluyentes y exhaustivos h_i, de tal manera que cada resultado tuviera probabilidad conocida f_i entonces las "loterías de caballos" degenerarían en loterías de ruletas. Esto significa que estamos suponiendo $[R_1, \ldots, R_s] \sim (f_1 R_1, \ldots, f_s R_s)$; es decir, $p_i = f_i$ para todo i. También añaden estos autores que la teoría de loterías de caballos que hemos expuesto puede extenderse de un conjunto de resultados finito $\{h_i\}$ a un espacio medible de resultados.

Si comparamos la terminología utilizada en esta teoría con la utilizada por Savage en la axiomática expuesta en el epígrafe anterior podemos decir que: las "loterías de caballos" se corresponderían con las "acciones" de Savage; los resultados de la "carrera de caballos" con los "estados de la naturaleza"; y los premios con las "consecuencias" de Savage.

<u>OBSERVACIONES</u> sobre la notación utilizada para las loterías.

(a) R es una lotería de ruleta, elemento cualquiera de $\mathcal{R}$. $R = (f_1 B_1, \ldots, f_k B_k)$ donde los premios B_i son elementos de $\mathcal{A}$, y las f_i son probabilidades objetivas conocidas.

(b) H es una lotería de caballos, elemento cualquiera de $\mathcal{H}$. $H = (p_1 R_1, \ldots, p_s R_s) = [R_1, \ldots, R_s]$ Los premios R_i son loterías de ruleta que pertenecen a $\mathcal{R}$.

(c) $\mathcal{R}^*$ es una lotería de ruleta elemento de $\mathcal{R}^*$
$R^* = (f_1 [R_1^1, \ldots R_s^1]_1 \ldots f_k [R_1^k, \ldots, R_s^k])$
donde los premios son
$H_1 = [R_1^1, \ldots R_s^1]_1 \ldots H_k = [R_1^k, \ldots R_s^k]$
loterías de caballos que pertenecen a $\mathcal{H}$.

4.4.5.- Axiomática de C. Villegas (1964)

Hasta 1964, con Villegas (18), no se había usado la propiedad de "numerablemente aditiva", en el desarrollo de la teoría de la probabilidad cualitativa, sin embargo, este autor opina que tal propiedad es fundamental en la teoría de la medida y que, por tanto, una propiedad equivalente tendría interés en la teoría de la probabilidad cualitativa, y en particular facilitaría la prueba de la existencia de medidas de probabilidad compatibles con la probabilidad cualitativa, como veremos en este epígrafe.

Villegas demuestra que si una probabilidad cualitativa es "no atómica" y monótona continua, entonces existe una y sólo una medida de probabilidad compatible con ella, y esta medida de probabilidad es numerablemente aditiva.

Definamos entonces, antes de seguir adelante, el concepto de probabilidad cualitativa "no atómica": la expresión "no atómica" es equivalente a decir que no tiene átomos y, en la teoría de la medida, átomo es un conjunto sin subconjuntos propios (es decir, irreducible) y con probabilidad mayor que 0, es decir, un suceso simple distinto del suceso imposible. En consecuencia, las distribuciones discretas tienen átomos y las continuas son 'no atómicas'.

Enlazando con lo anterior se puede demostrar también que cualquier probabilidad cualitativa fina y ajustada puede extenderse a una probabilidad cualitativa monótona continua y, por tanto, no hay pérdida de generalidad si consideramos solamente probabilidades cualitativas que sean monótonas y continuas.

Igual que antes, tenemos necesidad ahora de definir los conceptos de probabilidad cualitativa fina y ajustada, que aquí utiliza Villegas, pero que han sido definidos por Savage (19).

Si representamos la probabilidad cualitativa por $\leq$ y S es el conjunto total, B es un suceso (es decir, $B \subset S$) y ϕ es el conjunto vacio, diremos que: $\leq$ es fina si y sólo si para todo $B > \phi$ existe una partición de S tal que ningún elemento de ella es tan probable como B.

Antes de establecer el concepto de probabilidad cualitativa ajustada necesitamos establecer previamente el concepto de sucesos casi equivalentes.

Diremos que dos sucesos B y C son casi equivalentes si y sólo si para todo G y H, sucesos no nulos tal que $B \cap G = C \cap H = \phi$, $B \cup G \geq C$ y $C \cup H \geq B$.

Es obvio que si dos sucesos son equivalentes son también casi equivalentes.

Diremos que la probabilidad cualitativa $\leq$ es <u>ajustada</u> si y sólo si para todo par de sucesos casi equivalentes son equivalentes.

Después de esta pequeña digresión necesaria para definir esos conceptos poco habituales, retomamos la teoría expuesta por C. Villegas. Antes de formular los axiomas de esta teoría, comenzaremos estableciendo los elementos y operaciones que van a ser utilizados, al igual que hemos venido haciendo con otros autores.

Consideramos los sucesos sujetos a las operaciones usuales de unión, intersección y complementación que satisfacen los axiomas del álgebra de Boole, es decir, la unión e intersección de dos sucesos A y B se representarán respectivamente por $A \cup B$ y por $A \cap B$, y el complementario de A por $\bar{A}$. Si intuitivamente hablando decimos que A implica B , escribiremos $A \subset B$ y en este caso $A \cap B \equiv A$ y $A \cup B \equiv B$. La identidad de sucesos la representaremos por $\equiv$, dejando el signo igual ($=$) para significar 'igualmente probable que' . La relación $\subset$ es un orden parcial. El suceso imposible lo representaremos por ϕ . Dos sucesos son incompatibles o mútuamente excluyentes si su intersección es el suceso imposible (ϕ). Un resultado fundamental en la teoría de las álgebras de Boole es que todo álgebra de Boole es isomorfa al álgebra de conjuntos de un espacio Ω , siendo este resultado debido a Stone (20) y su construcción de Ω tiene la siguiente interpretación: clasifica los sucesos en dos clases, los que pueden "ocurrir" y los que no pueden "ocurrir". Esta clasificación nos lleva a las siguientes conclusiones:

1. Si A ocurre entonces $\bar{A}$ no ocurre

2. Si $A \subset B$ y A ocurre entonces B ocurre

3. Si $A \subset B$ y B no ocurre entonces A no ocurre.

Esta clasificación siempre existe y el conjunto Ω de todos los estados ω es el espacio de Stone del álgebra $\mathcal{A}$, siendo $\mathcal{A}$ el álgebra de sucesos isomorfa al álgebra de conjuntos de Ω. Si A es un suceso $A \in \mathcal{A}$, A se corresponde con el conjunto de los estados ω para los cuales A ocurre.

Con estos elementos vamos a establecer la probabilidad cualitativa. Si intuitivamente hablando, A y B son sucesos igualmente probables escribiremos $A = B$. Si A es estrictamente menos probable (o estrictamente más probable) que B, entonces escribiremos $A < B$ (ó $A > B$, respectivamente). Sin embargo, si A es menos probable (respectivamente más probable) que B, entonces escribiremos $A \leq B$ (ó $A \geq B$).

La relación $\leq$ entre sucesos será una probabilidad cualitativa si satisface los siguientes axiomas, donde $A < B$ significa que $A \leq B$ pero no $B \geq A$:

Axioma de preorden

La relación $\leq$ es un preorden total entre sucesos, con ϕ como primer elemento y Ω como último, es decir,

(a) Si A y B son dos sucesos entonces $A \leq B$ ó $B \leq A$

(b) Para todo suceso A, $A \leq A$

(c) Si $A \leq B$ y $B \leq C$ entonces $A \leq C$

(d) $\phi < \Omega$ y para cualquier suceso A, $\phi \leq A \leq \Omega$

Axioma de monotonía

Si $B_1 \cap B_2 = \phi$ entonces de $A_1 \leq B_1$, $A_2 \leq B_2$ se deduce que

$$A_1 \cup A_2 \leq B_1 \cup B_2$$

y si en una de las dos primeras desigualdades el signo es reemplazado por $<$ entonces la última desigualdad se cumple reemplazando el signo $\leq$ por $<$.

Estos axiomas son equivalentes a los propuestos por De Finetti en la axiomática expuesta en el epígrafe 4.4.1. Formalmente, la relación $A = B$ que significa que A y B son igualmente probables es definida por $A \leq B$ y $B \leq A$.

Si $A = \phi$ diremos que A es nulo o que es un suceso casi imposible, y si $A = \Omega$ diremos que A es un suceso casi seguro. Dos sucesos serán casi incompatibles si su intersección es el suceso nulo.

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de sucesos y $\leq$ es una probabilidad cualitativa definida sobre $\mathcal{A}$ entonces $(\mathcal{A}, \leq)$ será llamada álgebra de probabilidad cualitativa, y las siguientes proposiciones son consecuencia de los axiomas.

1. <u>Transitividad estricta</u>

   Si $A \leq B$ y $B < C$ entonces $A < C$

2. <u>Compatibilidad con la inclusión</u>

   Si $A \subset B$ entonces $A \leq B$

3.

   Si $A_2 \subset A_1$ y $B_2 \subset B_1$ entonces de $A_1 \leq B_1$ y $A_2 \geq B_2$ se deduce que

$$A_1 - A_2 \leq B_1 - B_2$$

4. <u>Dualidad</u>

   Si $A \leq B$ entonces $\bar{B} \leq \bar{A}$

Recordemos que la innovación en la teoría de Villegas estaba en introducir la condición para la probabilidad de numerablemente aditiva, para ello necesitamos establecer la probabilidad cualitativa sobre un σ-álgebra, y que esta probabilidad cualitativa sea monótona continua tal y como se establecerá en un teorema posterior. Damos a continuación dicha definición de probabilidad cualitativa monótona continua definida sobre un σ-álgebra.

<u>Definición</u> Diremos que una probabilidad cualitativa definida sobre un σ-álgebra de conjuntos de un espacio Ω es <u>monótona continua,</u> si dada una sucesión de sucesos monótona creciente $A_n \uparrow A$ (es decir, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ que converge a A) y un suceso B, tal que para todo n, $A_n \leq B$ entonces $A \leq B$. Si $\mathcal{A}$ es un σ-álgebra de conjuntos de un espacio Ω, y $\leq$ una probabilidad cualitativa monótona continua definida sobre $\mathcal{A}$, entonces el par $(\mathcal{A}, \leq)$ será llamado estructura de <u>σ-álgebra de probabilidad cualitativa.</u>

TEOREMA 1.

Una condición necesaria y suficiente para que $\leq$ sea <u>monótoma continua</u> es que dada una sucesión monotona creciente de sucesos $A_n \uparrow A$, y un suceso $B < A$, existe un entero $N > 0$ tal que para $n \geq N$ tenemos $B < A_n$.

En una estructura de σ-álgebra de probabilidad cualitativa se cumplen las siguientes proposiciones:

PROPOSICION 1.

Si $A_n \uparrow A$ y $B_n \uparrow B$ (o alternativamente $A_n \uparrow A$ y $B_n \downarrow B$) entonces de $A_n \leq B_n$, $n = 1, 2, \ldots$ se deduce que:

$$A \leq B$$

PROPOSICION 2.

Si $A_n \uparrow A$ y $B_n \uparrow B$ (o alternativamente $A_n \uparrow A$ y $B_n \downarrow B$) entonces de $A_n = B_n$, $n = 1, 2, \ldots$ se deduce que:

$$A = B$$

PROPOSICION 3.

Si $B_n \cap B_m = \phi$ para todo $m \neq n$, entonces de $A_n \leq B_n$, $n = 1, 2, \ldots$ se deduce que:

$$\overset{\infty}{\cup} A_n \leq \overset{\infty}{\cup} B_n$$

LEMA 1.

Si $(\mathcal{A}, \leq)$ es una estructura de σ-álgebra de probabilidad cualitativa y si $\{A_i : A_i \in \mathcal{A}, i \in I\}$ es una colección finita de sucesos casi incompatibles, entonces dado un suceso $A > \phi$, existe un número finito de A_i que son más probables que A.

COROLARIO.

Si $\leq$ es monótona continua, y si $\{A_i : i \in I\}$ es una colección infinita de sucesos igualmente probables y casi incompatibles, entonces todos los A_i son sucesos nulos.

LEMA 2.

Si $(\mathcal{A}, \leq)$ es una estructura de σ-álgebra de probabilidad cualitativa y $\{A_n\}$ es una sucesión de sucesos monótonas decreciente tal que $A_{n+1} \leq A_n - A_{n+1}$, entonces A_n converge a un suceso nulo.

LEMA 3.

Si una estructura de σ-álgebra de probabilidad cualitativa es no atómica entonces dado un suceso $A > \phi$, existe una sucesión monótona decreciente de sucesos no nulos $\{A_n\}$, cuyo primer elemento es $A_1 \equiv A$, y que converge a un suceso nulo.

TEOREMA 2.

Si una estructura de σ-álgebra de probabilidad cualitativa es no atómica entonces toda familia $\mathcal{F}$ de sucesos casi incompatibles no nulos es a lo sumo numerable.

El lema siguiente -el cuarto- y el teorema número trés, fueron comunicados a Villegas por J. J. Schäffer, tal como él mismo manifiesta. A pesar de que no son un eslabón esencial para nuestros argumentos, se incluyen para dejar completa esta teoría.

LEMA 4.

En una estructura de σ-álgebra de probabilidad cualitativa existen a lo sumo un número de átomos numerable que pueden ser ordenados en una serie $\{A_i : i = 1, 2, \ldots\}$ tal que para todo entero n, $A_n \geq A_{n+1}$

TEOREMA 3.

Toda familia $\mathcal{F}$ de sucesos no nulos casi incompatibles de una estructura de σ-álgebra de probabilidad cualitativa es, a lo sumo, una familia numerable.

Como base para los siguientes teoremas que vamos a exponer damos la siguiente definición:

DEFINICION :

Una partición de un suceso A es una colección de sucesos no nulos casi incompatibles cuya unión es A.

Una partición incompleta de un suceso A es una colección de sucesos no nulos casi incompatibles contenida en A .

Obsérvese que por el teorema previo, las particiones y las particiones incompletas de un suceso son, a lo sumo, colecciones numerables de sucesos. Si la unión B de todos los elementos de una partición incompleta de A es menos probable que $A - B$, entonces la partición incompleta será llamada partición incompleta menor.

TEOREMA 4.

Si una estructura de σ-álgebra de probabilidad cualitativa es no atómica entonces todo suceso puede ser particionado en dos sucesos igualmente probables.

TEOREMA 5.

En una estructura de σ-álgebra de probabilidad cualitativa, las proposiciones siguientes son equivalentes:

1. No existen átomos
2. Todo suceso puede ser particionado en dos sucesos igualmente probables.
3. Existe una sucesión uniforme de variables aleatorias con dos valores.
4. Existe una variable aleatoria uniforme.

Formulamos estos lemas, teoremas y proposiciones por que con ellos se recoge la teoría desarrollada por Villegas. Algunos establecen resultados formales para utilizar en otros posteriores, y en otros casos establecen consecuencias importantes para completar esta teoría. Omitimos las demostraciones para no alargar la exposición de esta teoría y puesto que no ofrecen mayor dificultad y son localizables en el artículo al que se hizo referencia (18).

Una vez que hemos establecido la condición de probabilidad cualitativa monótona continua y por tanto la estructura de σ-álgebra de probabilidad cualitativa, pasamos a formular la medida de probabilidad y cómo esta medida de probabilidad puede ser compatible con una probabilidad cualitativa sobre un σ-álgebra, y la condición para que sea numerablemente aditiva, constituyendo esta última parte de la exposición el objeto fundamental de la teoría de Villegas. Pasamos, por tanto a definir:

MEDIDAS DE PROBABILIDAD.

Una medida de probabilidad es una función que asigna un número $P(A)$ para todo A, llamado probabilidad numérica y que satisface los siguientes axiomas:

1. $P(\phi) = 0$; $P(\Omega) = 1$; y para todo suceso A $0 \leq P(A) \leq 1$.

2. Si $A \cap B = \phi$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
   Si P es una medida de probabilidad definida sobre una álgebra de sucesos $\mathcal{A}$, el par $(\mathcal{A}, P)$ se llama álgebra de probabilidad.

Si $\mathcal{A}$ es σ-álgebra de conjuntos de un espacio Ω diremos que la medida de probabilidad P es numerablemente aditiva si además de cumplirse los axiomas 1 y 2 se satisface también el axioma siguiente:

3. Si $\{A_i : i = 1, 2, \ldots\}$ es una sucesión de sucesos tal que para $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \phi$, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Estos tres axiomas son esencialmente iguales a los propuestos por Kolmogorov en 1933 y proporcionan la base de la teoría moderna de la probabilidad.

Se puede deducir facilmente que si una medida de probabilidad es numerablemente aditiva y $\{A_i\}$ es una sucesión de sucesos monótona entonces $\lim. P(A_i) = P(\lim A_i)$. El par $(\mathcal{A}, P)$ en el que $\mathcal{A}$ es un σ-álgebra de conjuntos y P una medida de probabilidad numerablemente aditiva, es llamado σ-álgebra de probabilidad. Un espacio de probabilidad es una terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ en el cual Ω es un conjunto, $\mathcal{A}$ es un σ-álgebra de conjuntos de Ω y P es una medida numerablemente aditiva definida sobre $\mathcal{A}$.

Diremos que un álgebra de probabilidad $(\mathcal{A}, P)$ es una extensión de una álgebra de probabilidad $(\mathcal{A}_o, P_o)$ si $\mathcal{A}_o$ es isomorfa a un subálgebra $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$, y P_o y P toman los mismos valores sobre los elementos correspondientes de $\mathcal{A}_o$ y $\mathcal{A}'$.

TEOREMA 6.

Cualquier álgebra de probabilidad puede extenderse a un σ-álgebra de probabilidad.

Observese que, puesto que la medida de probabilidad P numerablemente aditiva cuya existencia está garantizada por este teorema puede definirse escribiendo

$$P(A) = \sup. \{P_o(A_o) : A_o \subset A \ , \ A_o \in \mathcal{A}_o$$

para cualquier $A \in \mathcal{A}$, resulta que, si la medida de probabilidad dada P_o es no atómica, entonces P es también no atómica.

Diremos que una <u>medida de probabilidad P es compatible con una probabilidad cualitativa</u> $\leq$, si y sólo si

$A \leq B$ es equivalente a $P(A) \leq P(B)$

para cualesquiera par de sucesos A y B.

Recordemos que la probabilidad cualitativa $\leq$ entre sucesos significa "no más probable que".

Puede verse facilmente que dada una medida de probabilidad P definida sobre un σ-álgebra $\mathcal{A}$, la relación definida por $A \leq B$ si $P(A) \leq P(B)$ es una probabilidad cualitativa compatible con la medida de probabilidad dada P.

TEOREMA 7.

Una condición necesaria y suficiente para que una medida de probabilidad P que es compatible con una probabilidad cualitativa $\leq$, sea numerablemente aditiva es que la probabilidad cualitativa sea monótona continua.

TEOREMA 8.

Si un σ-álgebra de probabilidad cualitativa es no atómica entonces existe una y sólo una medida de probabilidad compatible con ella y que es numerablemente aditiva.

TEOREMA 9.

Si un álgebra de probabilidad cualitativa es fina y ajustada entonces puede extenderse a un σ-álgebra de probabilidad cualitativa.

TEOREMA 10.

Si un σ-álgebra de probabilidad cualitativa es no atómica entonces es fina y ajustada.

Con estos teoremas hemos establecido fundamentalmente las condiciones para tener una medida de probabilidad compatible con una probabilidad cualitativa $\leq$, y cuando esta medida de probabilidad es numerablemente aditiva.

4.4.6.- Axiomática de D. Scott (1964)

Generalmente las teorías desarrolladas para la elaboración de decisiones racionales bajo incertidumbre por De Finetti, Koopman, Savage etc., han tendido a producir resultados que garanticen una distribución de probabilidad única sobre los estados de la naturaleza o cualquier otra colección de entes que se usen para la expresión de los grados de creencia "a priori", considerando que las idealizaciones expresadas en los axiomas pueden observarse como teorías de pura racionalidad.

Una de las versiones más simples de esos axiomas es probablemente la dada por D. Scott en 1964 para el esquema de De Finetti de probabilidad subjetiva cualitativa, en el que las decisiones y las consecuencias no están explícitamente consideradas.

Los axiomas de Scott quedan formulados en la siguiente definición 1, en la cual la notación A^c se usa para representar la función característica de un conjunto A, y ϕ representa, como es habitual, al conjunto vacio.

La función característica A^c para un conjunto A se establece así:

$$A^c(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A \end{cases}$$

DEFINICION 1.

Sea X un conjunto no vacio y $\geq$ una relación binaria sobre el conjunto de todos los subconjuntos de X. Entonces una estructura $(X, \geq)$ es una estructura finita de grado de creencia cualitativo si y sólo si para todos los subconjuntos A y B de X se satisfacen los siguientes axiomas:

Axioma 1

$A \geq B$ ó $B \geq A$

Axioma 2

$A \geq \phi$

Axioma 3

$X > \phi$

Axioma 4

Para todos los subconjuntos $A_o, \ldots, A_n$, $B_o, \ldots, B_n$ de X, si $A_i \geq B_i$ para todo $0 \leq i < n$, y para todo $x \in X$

$$A_o^c(x) + \ldots + A_n^c(x) = B_o^c(x) + \ldots + B_n^c(x)$$

entonces

$$B_n \geq A_n$$

El axioma 4 sólo requiere que cualquier elemento de X pertenezca exactamente al mismo número de A_i y B_i para $0 \leq i \leq n$.

Veamos como el axioma 4 implica la transitividad. En primer lugar para tres funciones características cualesquiera

$$A^c + B^c + C^c = B^c + C^c + A^c$$

es decir, para todos los elementos x de X

$$A^c(x) + B^c(x) + C^c(x) = B^c(x) + C^c(x) + A^c(x)$$

Por hipótesis, para probar la transitividad, partimos de que tenemos tres sucesos A , B y C tales que $A \geq B$ y $B \geq C$ por tanto, utilizando el axioma 4 deducimos que $A \geq C$ es decir, hemos probado que se verifica la transitividad.

Scott demuestra que para cualquier estructura finita $(X , \geq)$ que satisfaga los axiomas de la definición 1 , existe una medida de probabilidad P , tal que para todo A y B subconjuntos de X

$$\underline{A \geq B}\ , \quad \text{si y sólo si} \quad P(A) \geq P(B)$$

La mayor dificultad que plantean los axiomas de Scott como desarrollo de una teoría del grado de creencia es que aparece un número tan grande de posibilidades en relación con las combinaciones posibles que ocurren al verificar dichos axiomas si el número de sucesos establecidos es muy grande. Por ejemplo, para probar el axioma 1 sólo necesitamos considerar pares de sucesos y para probar la transitividad utilizaremos ternas de sucesos, pero para probar el axioma 4 hay que considerar n-uplas de sucesos y, por tanto, para este caso, necesitamos expresar condiciones necesarias y suficientes que estudien las n-uplas de sucesos con n arbitrario si el número de sucesos aumenta considerablemente.

4.4.7.- Axiomática de Fishburn (1967).

Hasta este momento, como hemos venido viendo, se han usado dos aproximaciones fundamentales para definir la probabilidad subjetiva. Por una parte, la aproximación intuitiva, usada por Koopman, Scott, Villegas etc., que formulan los axiomas aplicando la relación de probabilidad comparativa "no es más probable que" a un conjunto de sucesos o proposiciones. Por otra parte, la aproximación que basa los axiomas teóricos sobre la relación de preferencia-indiferencia comparativa "no es preferido a" ; esta última aproximación es usada por Ramsey, Savage, Anscombe y Aumann. Cada una de las axiomatizaciones realizadas con esta segunda aproximación permite la deducción de una medida de probabilidad y una función de utilidad que combinadas con las probabilidades producen un modelo de utilidad esperado consistente con la relación "no es preferido a".

Presentamos ahora una nueva axiomatización, debida a Fishburn, que conduce a una distribución de probabilidad única sobre un conjunto de n estados en el contexto de un modelo de utilidad esperado.

Los métodos usados para esta aproximación implican tres etapas:

- La <u>primera etapa</u> establece los axiomas para obtener un modelo de utilidad esperada en el cual las utilidades comprenden todos los n estados, y las probabilidades están asociadas con sucesos que pueden no tener relación directa con los n estados.

- La <u>segunda etapa</u> usa un axioma adicional para hacer que cada utilidad exhaustiva (que comprenda los n estados) sea igual a la suma de las utilidades dependientes de cada estado, es decir,

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

donde u es la función de utilidad que comprende los n estados, y u_i la función de utilidad asociada con el estado i-ésimo s_i .

- La <u>tercera etapa</u> define cada u_i sobre un mismo conjunto y supone que cada u_i (para un s_i no nulo) tiene la misma ordenación sobre dicho conjunto. De esta manera llegamos a la definición de las probabilidades subjetivas de cada estado y a un modelo de utilidad esperada sobre dichos estados.

Esta axiomatización que combina probabilidad subjetiva y utilidad basada en la preferencia tiene características propias y especiales. Ramsey (21), Suppes (22) y Davidson y Suppes (23) plantean la hipotesis de un suceso de probabilidad 1/2 sobre la base de la relación "no es preferido a" ($\preccurlyeq$), y después utilizan este hecho para determinar la utilidad de los resultados, para finalmente con esta función de utilidad construida establecer las probabilidades subjetivas de los estados. Sobre este planteamiento hablaremos ampliamente en el último epígrafe de este capítulo.

Los autores Pratt, Raiffa y Schlaifer (24) emplean un experimento canónico con resultados igualmente verosímiles (dicho experimento canónico es un recurso de medida operativo) para sopesar utilidades y probabilidades subjetivas. De forma similar, como vimos en el epígrafe 4.4.4., Anscombe y Aumann usan probabilidades conocidas asociadas a los resultados de un juego de ruleta, siendo dichos resultados igualmente probables. Estos últimos autores miden las utilidades de los premios utilizados en su teoría por medio de la teoría de la utilidad esperada de Von Neuman y Morgenstern, y a partir de dichas utilidades deducen las probabilidades subjetivas para los estados que en el caso expuesto son los resultados de una carrera de caballos.

La axiomatización de Finsburn, que vamos a exponer aquí, usa la teoría de Von Neuman y Morgenstern aplicandola a n-uplas de distribuciones de probabilidad. Por tanto, antes de empezar con dicha axiomatización, vamos a exponer a continuación una idea general de la teoría de Von Neumann-Morgenstern:

Definiremos, en primer lugar, un <u>conjunto de mixtura</u> como un conjunto $\mathcal{A} = \{ A, B, C \dots \}$ y con una operación $\alpha . A + (1 - \alpha) . B$ que asocia un elemento de $\mathcal{A}$ con cada $\alpha \in [0, 1]$ y cada par ordenado $(A,B) \in \mathcal{A}^2$ tal que:

si $A, B \in \mathcal{A}$ y $\alpha, \beta \in [0, 1]$ entonces se cumple:

1.- $1 A + 0 B = A$

2.- $\alpha A + (1-\alpha) B = (1 - \alpha) B + \alpha A$

3.- $\alpha [\beta A + (1-\beta) B] + (1-\alpha) B = \alpha \beta A + (1-\alpha \beta) B$

Esta definición es idéntica a la dada por Herstein y Milnor en su trabajo "An axiomatic approach to measure utility" (25). Observemos que las propiedades 1, 2 y 3 implican que:

$$\alpha A + (1- \alpha) A = A$$

y que $\alpha [\beta A + (1-\beta) B] + (1-\alpha) [\ A + (1-\gamma) B] =$

$$= [\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma] A + [1-\alpha\beta - (1-\alpha)\gamma] B$$

Con la relación binaria $\preccurlyeq$ sobre $\mathcal{A}$, sea

$A \prec B = [A \preccurlyeq B$ y $B \not\preccurlyeq A]$ y

$A \sim B = [A \preccurlyeq B$ y $B \preccurlyeq A]$

la relación $\preccurlyeq$ sobre $\mathcal{A}$ es un orden débil si es transitivo y fuertemente conexo (o completo).

Los axiomas establecidos por Von Neuman-Morgenstern para el conjunto $\mathcal{A}$ con la relación $\preccurlyeq$ son:

1. <u>Axioma de estructura</u>

   $\mathcal{A}$ es un conjunto de mixtura

2. <u>Axioma de orden</u>

   La relación $\preccurlyeq$ sobre $\mathcal{A}$ es un orden débil.

3. <u>Axioma de independencia para combinaciones convexas</u>

   Si $A, B, C \in \mathcal{A}$, $\alpha \in (0, 1)$ y $A \prec B$ entonces

   $$\alpha A + (1-\alpha) C \prec \alpha\beta + (1-\alpha) C$$

4. Axioma Arquimediano

Si A , B , $C \in \mathcal{A}$, $A \prec B$ y $B \prec C$

entonces

$$\alpha A + (1-\alpha)\, C \prec B \quad \text{y}$$

$$B \prec \beta A + (1-\beta)\, C \quad .$$

para algún $\alpha , \beta \in (0 , 1)$

Estos axiomas son completamente estándar y con los resultados dados podemos demostrar el siguiente teorema:

TEOREMA

Dado el axioma 1 los axiomas 2 , 3 y 4 se cumplen si y sólo si existe una función de valores reales u sobre $\mathcal{A}$ tal que

[1] $A \preccurlyeq B$ si y sólo si $u(A) \leq u(B)$ para todo $A,B \in \mathcal{A}$

[2] $u(\alpha A + (1-\alpha) B) = \alpha\, u(A) + (1-\alpha)\, u(B)$

para todo $A , B \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in [0 , 1]$

Si u y v son dos funciones de valores reales sobre $\mathcal{A}$ de tal manera que cada una satisface [1] y [2] entonces existen dos números a y b , con $a > 0$, tal que

[3] $v(A) = a\, u(A) + b$ para todo $A \in \mathcal{A}$

Una vez que hemos expuesto estas ideas generales sobre la teoría de Von Neuman-Morgenstern pasamos a formular la axiomatización de Fishburn, tal y como antes anunciamos.

Para formular esta axiomatización partimos de un conjunto $S = \{ s_1 , \dots , s_n \}$ que es el conjunto de los n estados, y donde X es un conjunto de consecuencias. Como ya comentamos al establecer la axiomática de Savage vamos a respetar la notación utilizada originalmente por cada autor aunque sean distintas entre sí. Una distribución de probabilidad sobre un conjunto diremos que es simple si algún subconjunto finito tiene probabilidad 1 en la distribución.

Consideremos ahora el conjunto $\mathcal{R}$ de todas las distribuciones simples sobre X, y sea $\mathcal{H} = \mathcal{R}^n$. Cada $P \in \mathcal{H}$ es una n-upla de distribuciones de la forma $P = (P_1 , \dots , P_n)$ siendo P_i la distribucion asociada a s_i. Con esto queremos decir que si $P \in \mathcal{H}$ es seleccionada y s_i es el estado verdadero, entonces la consecuencia que resulta del conjunto X será elegida utilizando P_i.

Se define $\alpha . P + (1- \alpha) . Q$ de la forma natural escalar por vector como

$$\alpha . P + (1- \alpha). Q = (\alpha P_1 + (1- \alpha) Q_1 , \dots , \alpha P_n + (1- \alpha) Q_n)$$

donde $Q = (Q_1 , \dots , Q_n) \in \mathcal{H}$ y $\alpha . P_i + (1-\alpha) . Q_i$ es la combinación convexa usual de las distribuciones de probabilidad.

Es axioma 1 , de estructura, puede verse facilmente que se cumple cuando $\mathcal{H} = \mathcal{A}$, y podemos decir que si $\mathcal{A} = \mathcal{H}$, la teoría de Von Neuman-Morgenstern expuesta anteriormente puede aplicarse directamente a $\mathcal{H}$, y , por tanto, los axiomas propuestos por estos dos últimos autores se aplicarían a n-uplas de distribuciones de probabilidad. El axioma 3 sería aplicable si los estados se formulan de tal manera que sean consistentes con la idea de que cada uno sea, de hecho, el estado verdadero. Si, por ejemplo, i denota tiempo y cada P_i , como una distribución de probabilidad cualquiera de la n-upla $(P_1 , \ldots , P_n)$, selecciona un $x_i \varepsilon X$ resulta un vector consecuencia $(x_1 ,\ldots, x_n)$ sobre los n periodos de tiempo.

En el siguiente teorema vamos a ver como establecer la función de utilidad u sobre $\mathcal{H}$.

TEOREMA

Los axiomas 2 , 3 y 4 considerando $\mathcal{A} = \mathcal{H} = \mathcal{R}^n$ implican que, si establecemos la función de utilidad u sobre $\mathcal{H}$ que satisfaga las condiciones [1] y [2] del teorema anterior, existen n funciones de valores reales $u_1 ,\ldots, u_n$ sobre $\mathcal{R}$ tal que:

$$[4] \quad u\,(P_1 ,\ldots, P_n) = \sum_{1=1}^{n} u_i\,(P_i)$$

para todo $(P_1 ,\ldots, P_n) \varepsilon \mathcal{H}$

y cuando la condición [4] se cumple, para cada i

[5] $u_i(\alpha R + (1-\alpha) R') = \alpha u_i(R) + (1-\alpha) u_i(R')$

para todo $R, R' \in \mathcal{R}$, $\alpha \in [0, 1]$

Si la función u y la función u_i satisfacen [1],[2] y [4] y si las funciones de valores reales v sobre $\mathcal{H}$ y v_i sobre $\mathcal{R}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ satisfacen [1], [2] y [4] entonces existen los números $a, b_1, \ldots, b_n$ siendo $a > 0$ tal que la condición [3] del teorema anterior se cumple siendo $b = b_1 + \ldots + b_n$ y

[6] $v_i(R) = a\, u_i(R) + b_i$

para todo $R \in \mathcal{R}$, $i = 1, \ldots, n$

No demostramos este teorema ni los anteriormente expuestos por no alargar excesivamente la exposición de estas axiomáticas y pensando que con los enunciados de los teoremas quedan suficientemente reflejadas estas teorías.

A continuación formulamos los axiomas y definiciones que completan la tercera etapa de la teoría de Fishburn.

Axioma 5 (No trivialidad)

$P \prec Q$ para algún $P, Q \in \mathcal{H}$

Definición 1 (Orden para $\mathcal{R}$)

Si $R , R' \in \mathcal{R}$ entonces

$R \preccurlyeq R'$ si y sólo si $(R , \dots , R) \preccurlyeq (R' , \dots , R')$

donde $(R , \dots , R)$, $(R' , \dots , R') \in \mathcal{H}$

Definición 2 (Estados nulos)

$s_i \in S$ es nulo si y sólo si $P \sim Q$ para todo $P , Q \in \mathcal{H}$ siendo $P_j = Q_j$ para cada $j \neq i$; es decir $(P_1 , \dots , P_i , \dots , P_n) \sim (Q_1 , \dots , Q_i , \dots , Q_n)$ siendo $P_j = Q_j$ para cada $j \neq i$, entonces el suceso s_i con distribución de probabilidad P_i ó Q_i no influye para la indiferencia de las dos n-uplas de distribuciones de probabilidad.

Axioma 6 (monotonía)

Si $P = (P_1 , P_2 , \dots , P_{i-1} , R , P_{i+1} \dots P_n)$ y

$P' = (P_1 , P_2 , \dots , P_{i-1} , R' , P_{i+1} , \dots P_n)$

pertenecen a $\mathcal{H}$, entonces

$P \preccurlyeq P'$ si $R \preccurlyeq R'$ y

$P \prec P'$ si $R \prec R'$ y el estado s_i es no nulo.

El axioma 5 asegura una distribución de probabilidad única sobre los estados. Y el axioma 6 con la ayuda de los otros axiomas proporciona cada u_i para un estado s_i no nulo con la misma ordenación, es decir:

si s_i y s_j son no nulos, entonces

$u_i(R) \leq u_i(R')$ si y sólo si $u_j(R) \leq u_j(R')$

cuando R , $R' \varepsilon \mathcal{R}$

TEOREMA 3

Si u sobre $\mathcal{A} = \mathcal{H}$ es cualquier función de valores reales que satisfacen [1] y [2] y si los axiomas 5 y 6 se cumplen, entonces, siendo $u(R) = u(R ,..., R)$ para cada $R \varepsilon \mathcal{R}$, existe una función π de valores reales única sobre el conjunto de los estados S , tal que

$$[7] \quad u(P_1 ,..., P_n) = \sum_{1=1}^{n} \pi(s_i)\, u(P_i)$$

para todo $(P_1, ... , P_n) \varepsilon \mathcal{H}$

$$[8] \quad \underline{\pi(s) \geq 0} \text{ para cada } s \varepsilon S \text{ , y } \sum_{1=1}^{n} \pi(s_i) = 1$$

y bajo estas condiciones $\pi(s) = 0$ si y sólo si s es nulo.

Observemos que las $\pi(s_i)$ son las probabilidades subjetivas de los estados. El conjunto X es un conjunto de consecuencias con al menos dos elementos, y u necesita estar acotada si X contiene un número infinito de elementos.

Con los términos que han quedado establecidos podemos pasar a formular el modelo básico de utilidad esperada subjetiva.

Dicho modelo para el caso de n estados implica un conjunto F de acciones que son funciones de S en X, es decir, del conjunto de estados en el conjunto de consecuencias, de tal manera que si f es un elemento de F y s es un elemento de S, $f(s)$ será una consecuencia, por tanto será un elemento de X. Con estos datos el modelo de utilidad esperada subjetiva se formula con la siguiente condición:

$$[9] \quad f \precsim g \quad \text{si y sólo si} \quad \sum_{1=1}^{n} \pi(s_i) . \ u(f(s_i)) \leq$$

$$\leq \sum_{1=1}^{n} \pi(s_i) . \ u(g(s_i))$$

para todo $f, g \in F$

La condición [9] resulta de las condiciones [1] y [7] identificando f con $P = (P_1, \ldots, P_n)$ y como $f : s_i \to f(s_i)$ identificamos $f(s_i)$ con P_i para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ e identificando g en la misma forma.

Observemos que en la axiomática de Fishburn los conjuntos $\mathcal{R}$ y $\mathcal{H}$ se corresponden respectivamente con los conjuntos $\mathcal{R}$ y $\mathcal{H}$ usados por Anscombe y Aumann que ya referimos en el epígrafe 4.4.4. Para estos últimos autores, $\mathcal{R}$ es el conjunto de todas las 'loterías de ruleta' con premios en X, que es el conjunto de consecuencias usado por Fishburn, pero que los autores citados representaban por $\mathcal{A}$. El conjunto $\mathcal{H}$, que era en la axiomática anterior el conjunto de todas las 'loterías de caballos', es, en esta axiomática, el conjunto de n-uplas de distribuciones de probabilidad. La novedad en la teoría de Anscombe y Aumann radicaba en la doble aplicación de la teoría de Von Neuman-Morgenstern, ya que deducían las probabilidades de los estados para S finito a partir de las funciones de utilidad sobre $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^*$. Asimismo, la novedad en la teoría de Fishburn, como ya hemos señalado antes, se encuentra en la aplicación de la teoría de Von Neuman-Morgenstern a n-uplas de distribuciones de probabilidad.

4.4.8.- Axiomática de P. Suppes (1974)

Suppes proporciona una de las axiomáticas más simples que minimizarían el número de comparaciones necesitadas y que producirían algunos resultados sobre la medida fundamental si ésta existe. Es un modelo conceptualmente sencillo sobre cómo se pueden simplificar las comparaciones y cómo podemos obtener algunos tipos de resultados si los axiomas se satisfacen.

Suppes considera cinco clases de sucesos: sucesos que son ciertos (C); sucesos que son más probables que su contrario (N) ; sucesos que son menos probables que su contrario (L) ; sucesos que son tan probables como su contrario (E); y sucesos que son imposibles (I). De estas cinco clases de sucesos, dos se pueden tomar como básicas: la clase (C) y la (N); las otras tres, se pueden definir, a partir de esas dos, de la siguiente forma: si A es un suceso y $\bar{A}$ es su contrario, entonces $\bar{A}$ ocurre si A no ocurre; A es un suceso imposible si y sólo si $\bar{A}$ es un suceso seguro; A es menos probable que $\bar{A}$ si y sólo si $\bar{A}$ es más probable que A ; A es tan probable como $\bar{A}$ si y sólo si A no es seguro, ni imposible, ni más probable que $\bar{A}$, ni menos probable que $\bar{A}$.

Con las consideraciones anteriores, Suppes establece los axiomas de lo que él llama "estructura de probabilidad cualitativa débil". Para ello considera un conjunto no vacio X donde los sucesos A , B , ... son subconjuntos de X . Entonces, los axiomas de esta estructura de probabilidad cualitativa débil son los siguientes:

AXIOMA 1

X es el suceso seguro.

AXIOMA 2

Si un suceso A implica otro suceso B y A es el suceso seguro entonces B es seguro.

AXIOMA 3

Si un suceso A implica otro suceso B y A es más probable que $\bar{A}$ entonces B es más probable que $\bar{B}$.

AXIOMA 4

Si un suceso A implica otro suceso B , pero B no implica A , y A es tan probable como $\bar{A}$ entonces B es más probable que $\bar{B}$.

AXIOMA 5

Si A es un suceso seguro entonces $\bar{A}$ es un suceso imposible.

AXIOMA 6

Si un suceso A es más probable que $\bar{A}$ entonces $\bar{A}$ es menos probable que A .

A partir de estos axiomas se pueden deducir facilmente los siguientes teoremas elementales:

- Si un suceso A implica otro suceso B y B es menos probable que $\bar{B}$ entonces A es menos probable que $\bar{A}$.

- Si un suceso A es tan probable como $\bar{A}$ entonces $\bar{A}$ es tan probable como A .

- Si un suceso A es tan probable como $\bar{A}$, B es tan probable como $\bar{B}$ y A y B son mutuamente excluyentes, entonces la disjunción de los dos sucesos A ó B es un suceso seguro.

En muchos casos las situaciones descritas por los axiomas suponen que una persona conoce sus grados de creencia. Estos axiomas son estructurales y pueden no satisfacerse en una situación dada. Se exponen simplemente para indicar el tipo de resultados que podemos conseguir mediante algunos supuestos estructurales aparentemente sencillos. Observese que incluso con estos elementos estructurales no somos capaces de probar la existencia de una ordenación entre los sucesos en términos de menos probable o más probable. Los axiomas anteriores no son los axiomas más generales posibles, pero proporcionan una sencilla y útil base cualitativa.

Desde un punto de vista formal Suppes proporciona (26) otra estructura de medida aproximada finita para los grados de creencia. Desde este punto de vista las estructuras básicas a las que se aplican los axiomas son cuádruplas $(X, \mathcal{F}, \mathcal{S}, \geq)$ donde X es un conjunto no vacio, $\mathcal{F}$ es un álgebra de subconjuntos de X , es decir, $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos de X no vacia, y es cerrada respecto a la unión y la complementación, $\mathcal{S}$ es un álgebra de conjuntos similar y contenida en la primera, constituida por los sucesos que se usan para las medidas estándar, es decir para las medidas de referencia, y a los sucesos de $\mathcal{S}$ los llamaremos sucesos estándar, que representaremos por S , T , ... La relación $\geq$ es la relación de orden "no menos probable que" definida sobre $\mathcal{F}$. Utilizamos los símbolos habituales para la equivalencia y el orden estricto a partir de la relación de orden débil (un orden débil es transitivo y fuertemente conexo).

Pasemos a formular con estos elementos la estructura de medida aproximada finita para los grados de creencia referida anteriormente:

DEFINICION

Una estructura $\mathcal{X} = (X, \mathcal{F}, \mathcal{S}, \geq)$ es una estructura de medida aproximada finita para los grados de creencia si y sólo si X es un conjunto no vacio, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{S}$ son álgebras de conjuntos de X y se satisfacen los siguientes axiomas para cualesquiera A , B , C de $\mathcal{F}$ y para cualesquiera S y T de $\mathcal{S}$:

AXIOMA 1

La relación $\geq$ es un orden débil en $\mathcal{F}$

AXIOMA 2

Si $A \cap C = \phi$ y $B \cap C = \phi$ entonces

$A \geq B$ si y sólo si $A \cup C \geq B \cup C$

AXIOMA 3

$A \geq \phi$

AXIOMA 4

$X > \phi$

AXIOMA 5

$\mathcal{S}$ es un subconjunto finito de $\mathcal{F}$

AXIOMA 6

Si $S \neq \phi$ entonces $S > \phi$

AXIOMA 7

Si $S \geq T$ entonces existe un V de $\mathcal{S}$ tal que $S \approx T \cup V$ (donde el signo $\approx$ significa "igualmente probable")

Comparando los axiomas tres y seis observamos que A es un elemento arbitrario del álgebra general $\mathcal{F}$, pero el suceso S (referido en el axioma 6) es un elemento arbitrario del subálgebra $\mathcal{S}$. También en el axioma siete S y T son sucesos estándar, es decir, los sucesos de referencia que pertenecen al subálgebra $\mathcal{S}$. Los axiomas 1, 2, 3 y 4 son precisamente los conocidos axiomas de De Finetti si ningún cambio. Todos los sucesos estándar (en número finito) son también sucesos ya que $\mathcal{S}$ es un subconjunto finito de $\mathcal{F}$, según expone el axioma 5. Los axiomas 1, 2, 3 y 4 se cumplen tanto para los sucesos estándar como para los sucesos arbitrarios. El axioma 6 garantiza que todo elemento minimal del subálgebra $\mathcal{S}$ tiene probabilidad cualitativa positiva. Técnicamente un elemento minimal de $\mathcal{S}$ es cualquier suceso A de $\mathcal{S}$ tal que $A \neq \phi$, y no se da el caso de que exista un suceso B no vacio de $\mathcal{S}$, tal que B es subconjunto propio de A . Un intervalo abierto minimal (S , S') de $\mathcal{S}$ es tal que $S < S'$ y $S' - S$ es equivalente a un elemento minimal de $\mathcal{S}$. Tengamos en cuenta que un elemento minimal de $\mathcal{S}$, tal como se utiliza aquí, es equivalente a la noción de suceso simple o elemental que se utiliza habitualmente. El axioma siete es el principal axioma estructural, pero se cumple solamente para el subálgebra $\mathcal{S}$ y no para el álgebra general $\mathcal{F}$.

Además de la medida de probabilidad ordinaria establecida para los sucesos estándar, Suppes usará las <u>probabilidades inferior</u> y <u>superior</u> para expresar la medida inexacta de los sucesos arbitrarios, es decir, de los elementos del álgebra general.

Una buena discusión de las propiedades cuantitativas que se esperan de tales probabilidades inferior y superior se encuentra en el trabajo de J. I. Good de 1962, titulado "Subjective probability as the measures of a non-measurable set" (27). Suppes propone las siguientes propiedades para las probabilidades inferior y superior (no exponemos aquí las del trabajo de Good, pues éste trabajó con probabilidades condicionadas):

PROPIEDADES / Observación: $P_*(A)$ es la probabilidad inferior de un suceso A y $P^*(A)$ es la probabilidad superior de ese mismo suceso.

I. $P_*(A) \geq 0$

II. $P_*(X) = P^*(X) = 1$

III. Si $A \cap B = \phi$ entonces

$$P_*(A) + P_*(B) \leq P_*(A \cup B) \leq P_*(A) + P^*(B) \leq$$
$$\leq P^*(A \cup B) \leq P^*(A) + P^*(B)$$

Para todo A y B de $\mathcal{F}$

Para los sucesos estándar $P(S) = P_*(S) = P^*(S)$. Es decir para los sucesos de referencia la medida de probabilidad es exacta y, por tanto, coinciden la probabilidad superior con la inferior. Para un suceso arbitrario A , no equivalente en probabilidad cualitativa con un suceso estándar, su probabilidad "verdadera" pertenece al intervalo abierto $(P_*(A), P^*(A))$. Originalmente, Suppes incluyó una cuarta propiedad, que eliminó más tarde para simplificar la axiomática, al poder esta cuarta propiedad deducirse de las propiedades dos y tres; como hemos venido diciendo que queremos ser fieles a las axiomáticas originales, incluimos aquí esta cuarta propiedad a pesar de lo expuesto:

$$P_*(A) + P^*(\bar{A}) = 1$$

donde $\bar{A}$ es el complementario o contrario de A .

Exponemos también el argumento que demuestra que esta propiedad se deduce de la segunda y la tercera:

$$1 = P_*(X) = P_*(A \cup \bar{A}) \leq P_*(A) + P^*(\bar{A}) \leq P^*(A \cup \bar{A}) =$$

$$= P^*(\bar{X}) = 1$$

por tanto

$$1 \leq P_*(A) + P^*(\bar{A}) \leq 1$$

luego

$$P_*(A) + P^*(\bar{A}) = 1$$

Una propiedad más fuerte que cumplen algunas medidas de probabilidad inferior y superior es la siguiente:

$$\text{IV.} \quad P_*(A \cup B) + P_* (A \cap B) \geq P_*(A) + P_*(B)$$

Referente a esta propiedad IV Suppes da un contraejemplo para demostrar que no se cumple para toda estructura cualitativa.

Enunciaremos a continuación un teorema con el que Suppes formula la estructura de medida aproximada finita para los grados de creencia:

TEOREMA

Sea $\mathcal{X} = (X, \mathcal{F}, \mathcal{S}, \geq)$ una estructura de medida aproximada finita para los grados de creencia, entonces

(i) Existe una medida de probabilidad P sobre $\mathcal{S}$ tal que para cualesquiera dos sucesos estándar S y T

$$S \geq T \quad \text{si y sólo si} \quad P(S) \geq P(T)$$

(ii) La medida P es única y asigna la misma probabilidad positiva a cada suceso minimal de $\mathcal{S}$.

(iii) Si definimos P_* y P^* de la siguiente manera:

(a) Para todo suceso A de $\mathcal{F}$ equivalente a algún suceso estándar S

$$P_*(A) = P^*(A) = P(S)$$

(b) Para cualquier A de $\mathcal{F}$ no equivalente a un suceso estándar S pero que pertenece al intervalo abierto minimal (S, S') para los sucesos estándar S y S'

$$P_*(A) = P(S) \quad \text{y} \quad P^*(A) = P(S')$$

entonces

P_* y P^* satisfacen las condiciones I, II y III para las probabilidades inferior y superior sobre $\mathcal{F}$.

(c) Si n es el número de elementos minimales de $\mathcal{S}$ entonces para todo A de $\mathcal{F}$, se cumple

$$P^*(A) - P_*(A) \leq 1/n$$

(iv) Si definimos para todo A y B de $\mathcal{F}$

$A^* > B$ si y sólo si existe un suceso S de $\mathcal{S}$ tal que $A > S > B$, entonces $^*>$ es un semiorden sobre $\mathcal{F}$, si $A^* > B$ entonces $P_*(A) \geq P^*(B)$,

y si $P_*(A) \geq P^*(B)$ entonces $A \geq B$

Es interesante observar que se requiere, por lo referido hasta el momento, que el conjunto $\mathcal{S}$ de los sucesos estándar sea finito. El álgebra general de los sucesos arbitrarios podría tener incluso un cardinal mayor que el del continuo y así la relación $\geq$ sobre $\mathcal{F}$ podría no ser representable numéricamente, y sin embargo las probabilidades inferior y superior para todos los sucesos de $\mathcal{F}$ existirían y se definirían según el teorema que acabamos de exponer.

Resumiendo, la particularidad de esta axiomática radica en que plantea la existencia de unos sucesos arbitrarios (los elementos de $\mathcal{F}$) con probabilidades no determinadas exactamente, y unos sucesos de referencia (los elementos de $\mathcal{S}$) con la medida de la probabilidad estándar. Entonces establece una medida de probabilidad aproximada para los sucesos arbitrarios en función de las probabilidades de los sucesos estándar, tal y como queda establecido en el último teorema expuesto.

4.4.9.- Axiomática de S. French (1982)

Simon French, realiza dos observaciones que son adecuadas para muchas de las axiomatizaciones de la probabilidad subjetiva. En un primer comentario, se refiere al uso del experimento auxiliar para cuantificar sentimientos cualitativos de verosimilitud y este experimento auxiliar es esencialmente distinto del campo de sucesos de interés real, manteniendo esta distinción en la axiomatización que este autor propone. En una segunda observación, French comenta que todas las teorías de la probabilidad subjetiva están de acuerdo en que los grados de creencia (sentimientos cualitativos de verosimilitud, en expresión de este autor) están condicionados por el estado del conocimiento de la situación presentada y por el modo y actitud del individuo que está implicado en esta situación. Como el individuo cambia con el tiempo -el tiempo que cambia la situación y el conocimiento que el individuo tiene de ella-, estos condicionantes (conocimiento y estado sicológico) cambian también. Este cambio va a tener implicaciones para las condiciones bajo las cuales se plantea el problema, y por tanto, al cambiar estos condicionantes, cambiarán también las condiciones bajo las cuales se aplicará el teorema de Bayes, para prescribir cómo el individuo racionalmente actualizaría sus grados de creencia a la luz de una nueva observación particular.

French propone que para asegurar la existencia de una medida de probabilidad que represente el grado de creencia de un individuo todas las axiomatizaciones deben requerir que el espacio de sucesos sea un subcampo de sucesos, cuyas probabilidades el sujeto acepta como dadas, y además estas probabilidades deben formar un subconjunto denso del intervalo $[0, 1]$. Este subcampo ha sido denominado de forma variada como "experimento auxiliar", "experimento canónico" o "experimento de referencia". French, concretamente, utiliza el primer término. Algunos autores como Savage (28), Luce y Krantz (29) no reconocen el experimento auxiliar explícitamente en sus sistemas de axiomas, mientras que otros como DeGroot (30), Pratt y otros (31) si lo hacen.

Las axiomatizaciones que describen el experimento auxiliar al margen de los sucesos de interés real utilizan una medida símbolica para ponerla en manos del sujeto, al tiempo que le informan de cómo usarla. El análisis de la decisión real introduce explícitamente recursos aleatorios artificiales para capacitar al decisor a sopesar las incertidumbres de su problema. Por esto, French prefiere que el experimento auxiliar sea axiomatizado por separado.

Ahora bien, dado que el experimento auxiliar es considerado por separado de los sucesos de interés real tenemos que hacer otra indicación previa a dicha axiomatización; esta indicación es que no hay necesidad en la practica de considerar la verosimilitud de los sucesos formados por uniones e intersecciones de sucesos extraidos del campo de interés real y del campo del experimento auxiliar, y que tampoco hay necesidad de formar el más pequeño campo que contenga a ambos campos, el real y el auxiliar, y extender la ordenación de la verosimilitud de los individuos a éste, aunque en dicha axiomática normalmente quede establecido.

Con estas ideas, French presenta una axiomatización de probabilidad subjetiva manteniendo el experimento auxiliar por separado del campo de sucesos de interés real. Veamos como establece las condiciones de dicho experimento auxiliar:

Empezaremos por definir algunos términos para establecer las condiciones de dicho experimento:

- S es el conjunto de todos los resultados posibles a los que se enfrenta el sujeto, y cualquier subconjunto de S es un suceso posible de interés para él.

- $\mathcal{F}$ es un espacio de sucesos, es decir, el conjunto de los subconjuntos de S , el cual es cerrado respecto a la aditividad finita y la complementación.

- $\succsim$ es la relación que expresa el sentimiento de verosimilitud relativa del sujeto entre los sucesos del espacio $\mathcal{F}$. $\succsim$ es una relación binaria sobre un conjunto, inicialmente $\mathcal{F}$ que más tarde se extiende para incluir el experimento auxiliar. El significado de $\succsim$ se toma de tal manera que sea intuitivo para el sujeto.

$A \succsim B$ se lee "el sujeto cree que A es al menos tan probable como B "

$A \sim B$ significa que $A \succsim B$ y $B \succsim A$ por definición y se lee "El sujeto cree que A es igualmente probable que B "

$A \succ B$ significa por definición que $A \succsim B$ y $B \not\succsim A$ y se lee "el sujeto cree que A es estrictamente más probable que B ".

El término "suceso" se refiere a los objetos de interés y el sujeto puede imaginar un experimento auxiliar tal que el resultado debe pertenecer al intervalo $[0, 1]$, ya que estamos tratando con un experimento canónico y de esta forma tipificamos los resultos. Los axiomas suponen que la relación $\succsim$ puede extenderse para comparaciones de sucesos generados por este experimento auxiliar. Sin embargo, recordemos que no es necesario considerar sucesos formados por intersecciones de sucesos del experimento auxiliar con sucesos de $\mathcal{F}$.

Con estos términos French formula un sistema de axiomas partiendo del campo de Borel $\mathcal{B}$ de todas las uniones e intersecciones finitas de intervalos abiertos y cerrados en $[0, 1]$. Entonces el individuo imagina un experimento auxiliar con sucesos de $\mathcal{B}$ tal que la relación $\succsim$ se extiende a $\mathcal{B} \cup \mathcal{F}$ y entonces se cumplen los siguientes axiomas:

Axioma 1

La relación $\succsim$ es un orden débil, es decir, para cualesquiera A, B, C, se cumple

(a) bien $A \succsim B$ ó $B \succsim A$ ó ambas

(b) Si $A \succsim B$ y $B \succsim C$ entonces $A \succsim C$

Axioma 2

Sean I , J intervalos abiertos o cerrados de $\mathcal{B}$ con amplitudes l_I y l_J respectivamente entonces

$$I \succcurlyeq J \quad \text{si y sólo si} \quad l_I \geq l_J$$

Axioma 3

La relación $\succcurlyeq$ restringida a $\mathcal{B}$ es una probabilidad cualitativa, es decir, además de ser un orden débil, se cumple:

(a) $[0 , 1] > \phi$

(b) Para cualesquiera A , B , $C \in \mathcal{B}$ tal que

$A \cap C = B \cap C = \phi$

se cumple

$A \succcurlyeq B$ si y sólo si $A \cup C \succcurlyeq B \cup C$

Axioma 4

(a) $S \sim [0 , 1]$

(b) Para cualesquiera A , $B \in \mathcal{F}$ y C , $D \in \mathcal{B}$ tal que

$A \cap B = C \cap D = \phi$

Si $A \succcurlyeq C$ y $B \succcurlyeq D$ entonces

$A \cup B \succcurlyeq C \cup D$

y si $C \succcurlyeq A$, $D \succcurlyeq B$ entonces

$C \cup D \succcurlyeq A \cup B$

Axioma 5

Para cualquier $A \epsilon \mathcal{F}$ los conjuntos $\{ P \epsilon [0,1] / [0,P] \succcurlyeq A \}$ y $\{ P \epsilon [0,1] / A \succcurlyeq [0,P] \}$ son ambos cerrados

Axioma 6

Si $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots\ldots , A_n \epsilon \mathcal{F}$, $n = 1 , 2 , 3 , \ldots$ y si $A_n \geq [0,p]$ para algún p fijado, donde $p \epsilon [0,1]$, y para todo n , entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \succcurlyeq [0 , p]$$

El axioma 1 establece el supuesto usual del orden débil. El axioma dos describe la uniformidad del eperimento auxiliar. El axioma tres exige que la relación $\succcurlyeq$ debe ser una probabilidad cualitativa sobre el experimento auxiliar o de referencia. El axioma cuatro asegura que los sucesos seguros de ambos campos -el real S y el auxiliar $[0 , 1]$ - son igualmente ciertos y también establece un supuesto que vincula la verosimilitud de las uniones de $\mathcal{F}$ con la verosimilitud de las uniones de $\mathcal{B}$. Esto se establece utilizando un argumento similar al usado en el axioma tres, pero es necesario hacer este nuevo supuesto distinto porque $\mathcal{F}$ y $\mathcal{B}$ son campos que se construyen por separado. Usualmente la relación $\succcurlyeq$ se aplica al conjunto constituido por el más pequeño campo que contiene a $\mathcal{F}$ y $\mathcal{B}$ y la relación $\succsim$ se supone que es una probabilidad cualitativa sobre dicho campo. El axioma cinco es un axioma de continuidad para obtener la probabilidad subjetiva, y podría escribirse de una forma más clara que la anterior, y ésta sería:

para todo $A \in \mathcal{F}$, existe $P_A \in [0,1]$ tal que $A \sim [0,P_A]$

El axioma seis es necesario si la probabilidad es numerablemente aditiva, en cuyo caso $\mathcal{F}$ y $\mathcal{B}$ deben ser tomados como σ-campos, tal y como expusimos en la axiomática de Villegas, en el epígrafe 4.4.5. , adecuando dicha axiomática al sistema que estamos tratando aquí.

El siguiente teorema nos garantiza la existencia de una medida de probabilidad finitamente aditiva.

TEOREMA

Dados los axiomas del 1 al 5 , existe una medida de probabilidad finitamente aditiva y única $P : \mathcal{F} \to [0 , 1]$ que es compatible con la relación $\succsim$ sobre $\mathcal{F}$. Además, si $\mathcal{F}$ es un σ-campo y $\mathcal{B}$ es un σ-campo de Borel sobre el intervalo $[0 , 1]$ y se cumple el axioma seis, entonces P es numerablemente aditiva.

French sugiere que podían extenderse estas ideas a una axiomatización de utilidad esperada con resultados condicionales, sin embargo, pensamos que esta aproximación puede aplicarse a cualquier axiomatización de probabilidad subjetiva con o sin un tratamiento simultáneo de la utilidad.

*_*_*_*_*_*_*_*

Han sido tratadas en estos epígrafes las axiomáticas que consideramos más representativas y útiles desde el punto de vista que queremos dar a la probabilidad subjetiva como parte de un proceso de decisión. Después de expuestas estas axiomáticas pasaremos a tratar algunos problemas que se plantearán a la hora de establecer la asignación de estas probabilidades, ya que con la formalización de los axiomas no queda resuelto por completo el problema de dicha asignación.

4.5.- Valoracion de las distribuciones de probabilidad subjetiva.

Una vez que disponemos de la base formal, mediante los axiomas expuestos en los epígrafes anteriores, con la que guiar nuestro comportamiento a la hora de averiguar probabilidades subjetivas -comportamiento que será coherente si cumple dichos axiomas- nuestro problema fundamental en la valoración de probabilidades es estudiar cómo se determina si una valoración, en particular, o la habilidad del asesor -término ya introducido en el epígrafe 4.3- , en general, es "buena" o "precisa".

Desde el punto de vista del asesor ninguna valoración puede ser "errónea" con tal de que sea coherente y esté realizada con todo el cuidado y la consideración de todos los hechos relevantes y conocidos. Las valoraciones de probabilidad serán más o menos precisas a la luz de los sucesos posteriores. La cuestión es por tanto determinar la extensión de ese "más o menos". Al menos tres métodos han sido usados para ello. El primer método, como en un experimento de laboratorio, compara las respuestas del sujeto o probabilidades subjetivas con las llamadas probabilidades objetivas halladas por el experimentador, que es quien realiza también la comparación "objetiva". Un segundo método, consistente en evaluar las valoraciones de la probabilidad mediante funciones de penalización, que dependerán de las distribuciones valoradas y de los sucesos que se obtienen. En tercer lugar, es posible hacer una evaluación de las valoraciones sobre una serie de pruebas comparando el alcance con el cual las frecuencias relativas empíricas de los sucesos predichos se corresponden con las probabilidades valoradas.

Winkler y Murphy (32) han hecho una distinción muy útil, por la que la "bondad" del asesor adquiere dos dimensiones. La primera, "bondad sustantiva", se refiere primordialmente al conocimiento que el asesor tiene sobre el objeto de interés. La segunda, "bondad normativa", será la capacidad que el asesor tiene para expresar sus opiniones en forma probabilística.

En el epígrafe 4.3, tratabamos de forma más detallada el problema de la habilidad o "bondad" del asesor en estos dos sentidos o dimensiones. También se comentó con anterioridad que un método para estimular al asesor a hacer buenas valoraciones de las probabilidades, y por tanto para medir la habilidad del asesor, es mediante el uso de las reglas de puntuación o de tanteo a las que nos referiremos a continuación.

4.5.1.- Las reglas de puntuación.

Para evaluar las valoraciones de las probabilidades, consideramos n sucesos S_1 , S_2 , ... , S_n , mutuamente excluyentes y exhaustivos. Supongamos que una persona es requerida para valorar una distribución de probabilidad sobre S_1 , S_2 ,..., S_n y que las probabilidades formuladas pueden representarse por el vector $r = (r_1 , r_2 , \ldots , r_n)$. Además, supongamos que sus creencias "verdaderas" y, por tanto, las probabilidades de los sucesos inciertos, pueden representarse por $p = (p_1 , p_2 ,\ldots, p_n)$, entonces el asesor dirá que presenta sus creencias verdaderas cuando $r = p$.

Si llamamos regla de puntuación a una función del suceso obtenido y del vector de probabilidades r , entonces el asesor admite una puntuación que representamos por $S_k(r)$ si se obtiene el k-ésimo suceso. Además de proporcionar un medio para medir la habilidad predictiva del asesor, los objetivos de una regla de puntuación son estimular al asesor para que cuide sus valoraciones y que presente solamente sus creencias "verdaderas". Para lograr estos objetivos se han hecho varios supuestos. Diremos que el asesor posee las siguientes propiedades ideales (33):

1. Nunca viola los postulados de coherencia.
2. El asesor entiende completamente los procedimientos usados para obtener sus valoraciones de la probabilidad y los métodos usados para que dichas valoraciones sean

prudentes. Es decir, entiende las alternativas que se le presentan y las implicaciones de cada alternativa.

3. El asesor establece su función de utilidad y elige sus respuestas de tal manera que maximice la utilidad esperada.

Si $S_k(r)$ es la puntuación obtenida por el asesor cuando ocurre el suceso k-ésimo y si la probabilidad verdadera del asesor respecto a dicho suceso la representamos por p_k, entonces su puntuación esperada subjetivamente es $S(r,p)$, donde

$$S(r,p) = \sum_k P_k \cdot S_k(r)$$

Diremos que una regla de puntuación es propia estrictamente si:

$$S(p,p) > S(r,p) \qquad \text{para todo } r \neq p$$

Esto significa que con tal función el asesor maximizará su puntuación esperada subjetivamente si y sólo si presenta sus probabilidades verdaderas.

Las reglas de puntuación postulan, en primer lugar, la existencia de una distribución de probabilidad verdadera implícita en el asesor. Sin embargo, frecuentemente los asesores no conocen exactamente cuáles son sus opiniones probabilística "verdaderas". En segundo lugar, aunque la teoría estimula a los asesores a maximizar sus puntuaciones esperadas subjetivamente, las reglas de puntuación no tienen en cuenta el coste del procedimiento de valoración por parte del asesor. Es decir, el coste subjetivo de hacer una valoración es un factor importante que no debe ignorarse. En tercer lugar las reglas de puntuación están establecidas de tal manera que pueden no ser entendidas por personas con falta de experiencia matemática. Por esta razón a veces las reglas de puntuación serán establecidas por otras personas en lugar de por los asesores mismos, si éstos no están capacitados para entender dichas reglas. Finalmente se ha demostrado que muchas de las reglas de puntuación no son significativas en el sentido de que las diferencias entre las puntuaciones esperadas atribuibles a diferentes probabilidades no son siempre grandes. Es decir, si ante diferentes probabilidades formuladas las diferencias entre las puntuaciones esperadas, mediante dichas reglas de puntuación no son significativas, dicha regla de puntuación no fomentará necesariamente valoraciones precisas.

La evidencia empírica sobre los efectos de las reglas de puntuación es incompleta, ya que aunque existe una necesidad de evaluar las diferentes habilidades de los asesores y las reglas de puntuación pueden ser útiles para este propósito, si se tiene cuidado en establecer de forma correcta los procedimientos de valoración, sin embargo puede ocurrir que la valoración de un asesor particular cree más problemas de los que resuelve.

4.5.2.- El problema del consenso en las valoraciones de grupo.

En muchas situaciones, un grupo de personas puede necesitar valorar una distribución individual como resultado del conjunto de opiniones del grupo. Así, no solamente deben estos individuos ser capaces de valorar sus propias incertidumbres en forma probabilística, sino que deben encontrar la forma de construir una distribución de probabilidad del grupo. Este problema hace que surjan dificultades importantes, tanto teóricas como prácticas.

Al conceptualizar los problemas de valoración del grupo, es conveniente considerar los miembros de un grupo como un conjunto de expertos que están representando a una tercera persona, esta situación abarca dos situaciones distintas, una, el caso de que el grupo de expertos sea realmente consultado por una tercera persona ajena a ellos, y un segundo caso en el que esta persona no exista, pero el grupo se plantee su existencia hipotética o ficticia, para poder formular esa distribución individual que representa las opiniones de todo el grupo como una opinión consensuada. En ambas situaciones tiene interés usar las reglas de decisión para transformar varias distribuciones de probabilidad en una distribución global del grupo, es decir, estamos planteando el problema de la agregación estadística de distintas distribuciones de probabilidad y discutiremos métodos de comportamiento donde el consenso del grupo se alcanza a través de la interacción de los individuos en el propio marco del grupo. El problema del consenso será, por tanto, determinar una distribución individual por parte del grupo.

Siguiendo a Stone (34) la mayor parte de los investigadores conciben las valoraciones de grupo como representación de una "fusión de opiniones", que se forma tomando el promedio ponderado de las opiniones individuales. Pero, ésta no es la única forma de llegar a esa fusión de opiniones. Por tanto, plantearemos aquí algunos métodos diferentes a áquel para tratar este problema del consenso del grupo, métodos a los que ya hicimos referencia en el epígrafe 4.2. , pero que aquí serán desarrollados de forma más explícita.

4.5.2.1.- Aproximaciones matemáticas.

Supongamos que K expertos E_1 , E_2 ,..., E_k han sido consultados y cada uno de ellos ha valorado una distribución de probabilidad para un parámetro (o vector de parámetros) θ . Sea $f_i(\theta)$ la distribución de probabilidad del experto E_i , y suponemos que en la valoración de $f_i(\theta)$, E_i no ha violado los postulados de coherencia. Es decir, cada $f_i(\theta)$ satisface los requerimientos matemáticos de una distribución de probabilidad. El problema, entonces, consiste en determinar a partir de las $f_i(\theta)$ la distribución individual consensuada que representaremos por $f(\theta)$ que representa el consenso de todas las $f_i(\theta)$.

Si llamamos D al decisor que contrata a los asesores o expertos -ó suponemos un hipótetico D aunque no exista, tal como antes planteamos- . En cualquiera de ambos supuestos, éste D (decisor) es el que quiere determinar la distribución de probabilidad $f(\theta)$. Existen varias aproximaciones matemáticas para resolver este supuesto, esto es, existen varias aproximaciones matemáticas para combinar las $f_i(\theta)$ de forma que quede determinada $f(\theta)$.

A. Método del promedio ponderado.

Quizá el método más simple para obtener la distribución $f(\theta)$ es tomar la media ponderada de las k distribuciones

$$f(\theta) = \sum_{i=1}^{k} W_i \; f_i(\theta)$$

donde $w_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$

La restricción de que las ponderaciones w_i suman 1 es necesaria para que $f(\theta)$ esté normalizada.

El problema para realizar esta fusión de opiniones por el método del promedio ponderado está en determinar las ponderaciones para cada una de las distribuciones de los asesores o expertos. Parece razonable asignar una ponderación mayor a $f_i(\theta)$, y por tanto al experto E_i , que a $f_j(\theta)$, y por tanto al experto E_j solamente si E_i es considerado mejor asesor que E_j con respecto a los parámetros en los que se situe el problema. Pero la cuestión de quien es mejor asesor y en que grado no admite una respuesta objetiva y única, aunque podamos tener una experiencia disponible previa, es decir, que podamos tener información sobre la precisión de cada experto en predicciones anteriores.

La mayor o menor "bondad" del asesor se plantearía como un juicio subjetivo de otra persona acerca del asesor, y ésta persona tendría en cuenta la experiencia disponible. Puesto que el decisor D es responsable de llevar a cabo el análisis, él sería el encargado de valorar subjetivamente las ponderaciones. Operando así D asignaria cualquier valor no negativo a cada w_i , con tal que $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$. En muchos casos, D podría usar una de las siguientes reglas para determinar las ponderaciones, con tal de que la regla en cuestión esté de acuerdo con sus juicios.

Regla A.1.- <u>Ponderaciones iguales.</u>

Esta regla propone un esquema de ponderación simple que asigna iguales ponderaciones $w_i = 1/k$ para $i = 1,2, \ldots, K$ a cada miembro del grupo. En este caso el decisor (D) no tiene razón para pensar que hay mucha diferencia entre las capacidades de los E_i y por ello asigna ponderaciones iguales.

Aplicando esta regla, el resultado de la distribución de probabilidad consensuada sería el promedio de las $f_i(\theta)$, por tanto

$$f(\theta) = \frac{\sum_{1=1}^{k} f_i(\theta)}{K}$$

Regla A.2.- <u>Ponderaciones proporcionales a una ordenación.</u>

Este método consiste en ordenar los E_i de 1 a k según su "bondad" , donde la categoría o posición más alta de esta ordenación corresponde al mejor asesor. Esta regla supone que el decisor D piensa que los E_i pueden ser clasificados de esta forma, ya sea por el conocimiento que posee de ellos, ya sea porque el grupo de asesores haya sido compuesto de esta forma.

En este caso las ponderaciones asignadas a los E_i son

$$\frac{r}{\sum_{r=1}^{k} r}$$

con rango r para $r = 1, 2, \ldots, k$

Regla A.3.- Ponderaciones proporcionales a una autovaloración (o autoordenación).

En este caso, es el propio grupo quien ordena a sus expertos en mayor o menor "bondad", siendo el método elegido por el grupo el de la autovaloración, esto es, cada E_i se autovalora en una escala de 1 a c , donde c expresa la valoración más alta y 1 la más baja. Entonces se asigna a cada E_i una ponderación proporcional a su autovaloración, donde la constante de proporcionalidad es determinada para que las ponderaciones sumen 1 .

La racionalidad de esta regla se encuentra en que una persona puede ser un experto en un campo dado, pero su experiencia puede variar de un tema a otro del mismo campo y la persona, por ella misma, puede ser la que mejor juzgue cómo es de competente respecto al tema o parámetros específicos. En esta misma racionalidad puede residir el peligro de esta regla, al ser posible que la autovaloración se descompense por la propia sobreestimación (o subestimación) de cada experto.

Regla A.4.- Ponderaciones basadas en alguna comparación de distribuciones valoradas previamente con resultados reales.

Obviamente por la propia definición de esta regla, el método se basa en la experiencia de resultados reales previos que mediante comparación han clasificado de alguna forma la "bondad" de los expertos.

Ahora bien, el problema se plantea al pensar en cómo establecer estas comparaciones. Por una parte Winkler (35) sugiere algunas reglas de puntuación (o tanteo) que podían usarse para hacer dichas comparaciones. Por otra parte Roberts (36) sugiere establecer las razones de verosimilitud para comparar la habilidad predictiva de los expertos y esto implicaría, como ya vimos, la aplicación del teorema de Bayes para revisar formalmente las ponderaciones de experiencias reales anteriores, actualizandolas a partir de una determinada observación formulada.

Estas cuatro reglas son meramente sugeridas como aproximaciones convenientes. Las valoraciones finales de las ponderaciones tiene que establecerlas el decisor D y éste usaría las reglas solamente si las ponderaciones resultantes no estuvieran en desacuerdo con sus juicios.

Obsérvese que, según hemos propuesto al principio, puede no existir realmente el decisor D . En este caso, el propio grupo elegiría la regla más conveniente para la resolución del problema teniendo en cuenta los parámetros de éste.

B. Otros métodos.

B.1. Método de DeGroot (37).

Un método interesante propuesto por DeGroot para alcanzar el consenso de grupo, consiste en lo siguiente: cada miembro del grupo debe valorar primero una distribución $f_{i1}(\theta)$ para después de confrontarla con las distribuciones obtenidas por los otros miembros del grupo, revisa su propia opinión a la luz de las otras opiniones, haciendo una valoración de la importancia relativa de cada miembro del grupo. Cada opinión revisada se obtiene de la forma

$$f_{i2}(\theta) = \sum_{j=1}^{k} P_{ij} \, f_{j1}(\theta)$$

donde los subíndices 2 y 1 se refieren a las distribuciones revisada y no revisada respectivamente; y p_{ij} es la ponderación correspondiente a la importancia asignada por el individuo i al miembro del grupo j

y $$\sum_{j=1}^{k} P_{ij} = 1 \qquad \text{para todo} \quad i = 1,2,3, \ldots, k$$

Dado que cada miembro del grupo revisa de esta manera su propia opinión, para que ésta sea consistente con las demás. Continuando el proceso de actualización de sus propias distribuciones, a la luz de las revisiones de las de los demás miembros, hasta que deje de haber variaciones en las nuevas revisiones.

DeGroot demuestra que este proceso puede interpretarse dentro de la teoría de "las cadenas de Markov" y los teoremas de límite de dicha teoría pueden utilizarse para ver si existe la distribución de consenso y caso de que exista determinar cual es. Puesto que además de las valoraciones originales de las distribuciones de cada miembro del grupo, los únicos juicios suplementarios que se necesitan son las ponderaciones p_{ij}, esto hace que este método sea lo suficientemente simple como para ser recomendado.

B.2. **Método de Eisemberg y Gale.**

Eisenberg y Gale presentan también un método basado en un hábil esquema mecánico para combinar distribuciones de probabilidad, que se basa en el método de apuestas "totalizador". Por apartarse bastante del interés general de este trabajo, no exponemos aquí este método que puede encontrarse en (38).

B.3. **Método de las distribuciones conjugadas naturales.**

Otra alternativa para la "fusión de opiniones" es el método de las distribuciones conjugadas naturales propuesto por Winkler (39). Con este método cada opinión de un miembro del grupo consideramos que constituye una "experiencia muestral" y, para formar la valoración final del grupo, se combinan las distribuciones "a priori", que Winkler denomina "conjugadas naturales" , mediante sucesivas aplicaciones del teorema de Bayes. Desafortunadamente este método es difícil de aplicar puesto que no sólo es necesario determinar las ponderaciones asignadas a cada miembro del grupo sino que también hay que establecer el grado de dependencia de las muestras ficticias que recogen los datos de las opiniones de cada miembro.

4.5.2.2.- Aproximaciones behavioristas.

Como dejamos apuntado en el epígrafe 4.2. los behavioristas aplican al problema del consenso de grupo métodos no matemáticos, intentando resolver este problema mediante dos aproximaciones, que se basan fundamentalmente en aspectos del comportamiento de los individuos que componen los grupos. Estas aproximaciones son:

A. Método de revaloración y realimentación (feed-back) (para cada individuo del grupo).

Este método considera que cada miembro del grupo vuelve a valorar su distribución de probabilidad, supuesto que esta estuviera ya establecida, después de obtener información de las valoraciones de sus compañeros del grupo de expertos, mediante un proceso de feed-back. Si cada experto E_i vuelve a valorar su $f_i(\theta)$ después de realizarse el proceso de realimentación de in formación, el resultado sería aún de k distribuciones, una por cada experto E_i , en lugar de una sola distribución como representación del grupo, que es el objetivo planteado. El proceso de realimentación se realiza n veces de forma repetida hasta que conduzca a un acuerdo entre los expertos para así resolver el problema, puesto que tenderíamos a aproximarnos a una distribución límite si el número de veces que se realiza el feed-back es suficientemente grande. La razón por la que se llegaría a esta situación de convergencia o consenso dependería de la cantidad y naturaleza de las diferencias originales entre las distintas valoraciones, y el juicio que cada experto tenga sobre la "bondad" de los otros expertos. Por ejemplo, supongamos que todas las distribuciones, menos una o dos, son muy similares y sean $f_1(\theta)$ y $f_2(\theta)$ las dos distribuciones de probabilidad más diferentes a las demás. Si E_1 y E_2 tienen confianza en los juicios de los restantes $k-2$ expertos, podrían cambiar sus distribuciones haciendolas similares a las de los otros. Por otra parte, supongamos que las k distribuciones no son en absoluto similares y cada experto tiene más confianza en sus juicios que en los juicios de sus compañeros de grupo, en este caso puede ser que el proceso de feed-back y revaloración no conduzca a un acuerdo, y en el caso que si llegara a un acuerdo sería después de un alto número de veces en que se repitiera el proceso. Entre estos dos casos extremos se encontrarían todos los posibles.

La técnica de realimentación y revaloración puede ser de utilidad tanto si conduce como si no conduce a la convergencia en el sentido indicado antes. En el caso de que la convergencia ocurra el problema del consenso quedaría prácticamente resuelto a falta de especificar completamente la distribución de probabilidad $f(\theta)$. Si este proceso no conduce a la convergencia, una alternativa sería realizar el análisis formal con cada una de las k distribuciones individuales por separado y comparar los resultados.

B. Método de revaloración del grupo.

Con la técnica de feed-back y revaloración expuesta antes, cada E_i es preguntado individualmente para valorar de nuevo sus $f_i(\theta)$. Aunque al experto E_i se le presentan las distribuciones de los otros expertos cuando se realiza el proceso de feed-back, sin embargo, no existe contacto directo entre los miembros del grupo. Otros métodos que implican revaloración si permiten tales contactos entre los miembros del grupo, y estos métodos son los métodos de valoración de grupo. Los estudios experimentales que utilizan métodos de revaloración de grupo investigan los efectos de la interacción del grupo.

Puesto que se necesita una distribución individual que recoja la opinión global del grupo, el procedimiento más simple consistiría en reunir a los miembros del grupo presentándoles los resultados del proceso de feed-back e instruirles para discutir el asunto y llegar a un consenso individual o distribución de grupo. Este proceso es comparable al de elaboración de una decisión que lleva implícito factores de otro tipo, además de las distribuciones de probabilidad. Los factores de otro tipo podrían ser, por ejemplo, las funciones de utilidad de los expertos, y entonces el consenso de grupo tendría que elaborarse considerando dichas utilidades además de las distribuciones de probabilidad de los parámetros.

El contacto entre los expertos y su objetivo de acordar una distribución individual conduciría a entrar en factores sicológicos. Por ejemplo, alguno de los E_i puede influir fuertemente sobre los otros miembros del grupo y puede dar sensación de unidad incluso sin que el grupo esté de acuerdo, dado el liderazgo que ese miembro del grupo ejerce sobre los demás. La opinión de este supuesto líder de grupo, esto es su valoración de la distribución de probabilidad, en términos de la discusión anterior sobre ponderaciones, significa que algunas $f_i(\theta)$ serían más ponderadas que las demás en la determinación matemática de la distribución consensuada $f(\theta)$ del grupo.

Para evitar la influencia de este supuesto líder de grupo y para evitar otras posibles influencias por diferentes motivos sicológicos, es recomendable que cada miembro del grupo de expertos vuelva a valorar sus $f_i(\theta)$ individuales, después del acuerdo del grupo sobre $f(\theta)$. Esto puede reflejar mejor sus juicios reales "a posteriori", a la vez que capacita al grupo, una vez que ha estudiado la forma de convergencia de sus valoraciones, para futuros problemas de esta índole. Esta nueva situación de discusión puede servir para rechazar la distribución consensuada $f(\theta)$ y llegar después de una nueva revaloración individual -repitiendo el proceso cuantas veces sea necesario- para conseguir una "mejor" $f(\theta)$, al menos en el sentido de mejor consensuada.

Los métodos de grupo difieren de los discutidos previamente en que permiten a los miembros del grupo estar juntos y discutir el problema, aunque debe indicarse que esto sólo es posible hacerlo en el caso de que sea económicamente factible. En muchos casos, el coste de reunir a un grupo de expertos sería muy grande pero, si el problema es suficientemente serio para justificar el consultar a un determinado número de expertos, también podría serlo para justificar el coste de reunirlos a todos. En definitiva, la magnitud del problema condicionará el factor económico. En cualquier caso, el factor económico no es posible olvidarlo en la toma de decisiones, pero este problema constituiría por si sólo un amplio campo de estudio que aquí dejamos abierto para posteriores trabajos.

4.6.- Caracterización conjunta de la utilidad y la probabilidad subjetiva.

Para finalizar este capítulo, pasamos a estudiar conjuntamente la probabilidad subjetiva y la utilidad ya que como se indicó en el primer capítulo de esta tesis doctoral dicho tratamiento conjunto merece una atención especial. Recordemos, que este asunto además de mencionarse en ese primer capítulo, se ha tratado a lo largo de éste cuarto capítulo en el punto dedicado a la axiomática de Fishburn. El intento, por tanto, de este apartado es estudiar más extensamente la relación conjunta preferencia-utilidad-probabilidad subjetiva. En algunos casos, se repetirán ideas formuladas anteriormente, que utilizaremos para dar una imagen total del problema objeto de estudio de este epígrafe.

Comenzamos con unas referencias al tema de la utilidad. En la literatura económica clásica, la distinción más importante que se hace sobre la utilidad es la distinción entre utilidad "ordinal" y utilidad "cardinal". El término utilidad ordinal se refiere únicamente al supuesto del orden entre las utiidades, mientras que el término cardinal está referido al supuesto de aditividad, y si no se cumpliera éste se exige, al menos, la unicidad en la asignación numérica salvo una transformación lineal.

Durante el siglo XIX era bastante común creer que la teoría económica se desarrollaría solamente sobre la base de las funciones de utilidad ordinales, siendo Pareto (40) uno de los grandes contribuidores a dicha teoría.

La teoría de las funciones de utilidad ordinales trata precisamente con la preferencia cualitativa de una alternativa sobre otra. Para aplicar el análisis matemático en este marco, lo primero que se necesita es la representación de la preferencia en forma de una función de utilidad numérica. Una vez que tal función numérica está construida se puede usar para desarrollos teóricos posteriores con la posibilidad de aplicar instrumentos matemáticos estándar a los problemas de comportamiento. Por esta razón trataremos una serie de teoremas generales sobre la existencia de funciones de utilidad numérica que reflejan la estructura de preferencia cualitativa. La teoría de las funciones de utilidad ordinales fué de hecho desarrollada para responder a algunas cuestiones del comportamiento del consumidor. Por ello, vamos a esbozar el marco de estas cuestiones.

Supongamos que el consumidor tiene unos ingresos M en el tiempo t_o (consideremos el caso de que t_o sea estático, evitando así la referencia explícita al tiempo). Con estos ingresos el consumidor puede comprar un conjunto de artículos de consumo que vamos a describir por un vector n-dimensional real $x = (x_1 , \dots , x_n)$ donde la componente i-ésima expecifica la cantidad que es consumida del artículo i . Siguiendo la notación estándar, decimos que el vector o n-upla x es mayor que x', en símbolos $x > x'$, si para todo i, $x_i \geq x'_i$ y para algún i $x_i > x'_i$. Como fundamento de la teoría de la demanda del consumidor se introduce una relación de preferencia P sobre los vectores de artículos. La relación $x\ P\ y$ se lee: el conjunto de artículos x es preferido al conjunto de artículos y. Los ingresos M del consumidor, los precios corrientes p_i del mercado, y la estructura de su relación de preferencia P determinan la elección de los artículos.

Además de la relación P es también necesario introducir una relación I de indiferencia, para que no sea razonable que de dos conjuntos distintos de artículos uno cualesquiera de ellos sea necesariamente preferido estrictamente al otro. En muchos casos, para abreviar, reemplazaremos P e I por la relación de preferencia débil R. La relación R representa respecto de P lo mismo que la relación numérica $\geq$, representa respecto de $>$. Tenemos por tanto, las siguientes equivalencias evidentes:

$x\ R\ y$	si y sólo si	$x\ P\ y$	ó	$x\ I\ y$
$x\ I\ y$	si y sólo si	$x\ R\ y$	e	$y\ R\ x$
$x\ P\ y$	si y sólo si	$x\ R\ y$	y no	$y\ R\ x$

Los siguientes postulados sobre la estructura de relación de preferencia débil R son razonablemente intuitivos y garantizan la existencia de una función de utilidad.

DEFINICION 1. Una relación R sobre el conjunto de todas las n-upla de artículos (vectores n-dimensionales) es una relación de preferencia si los siguientes postulados se satisfacen, para cualesquiera n-uplas x , y , z .

Postulado 1. Transitividad

Si $x \, R \, y$ e $y \, R \, z$ entonces $x \, R \, z$

Postulado 2. Conexidad

$x \, R \, y$ ó $y \, R \, x$

Postulado 3. No saturación completa

Si $x > y$ entonces $x \, P \, y$

Postulado 4. Continuidad

Si $x \, R \, y$ e $y \, R \, z$ entonces existe un número real λ tal que $0 \leq \lambda \leq 1$, y $[\lambda x + (1-\lambda) Z] \; I \; y$

De estos cuatro postulados, los dos primeros son los más generales y cuando éstos se satisfacen, decimos que la relación R es una relación de orden débil. Se entiende que el "ó" del axioma dos incluye que se cumplan ambas relaciones $x \, R \, y$ e $y \, R \, x$.

El siguiente teorema nos garantiza la existencia de una función de utilidad.

TEOREMA 1.

Sea R una relación de preferencia sobre el conjunto de n-uplas de artículos en el sentido de la definición 1. Entonces existe una función de utilidad u que satisface

$$u(x) \geq u(y) \quad \text{si y sólo si} \quad x \, R \, y$$

El problema de la representación numérica de las preferencias no queda completamente resuelto demostrando la existencia de una función de utilidad sino que para conocer el alcance en que los métodos numéricos de análisis pueden aplicarse es necesario también que dicha función de utilidad sea única. Referente a este problema de unicidad enunciamos el siguiente teorema:

TEOREMA 2.

Sea R una relación de preferencia en el sentido de la definición 1. Entonces para cualesquiera dos funciones de utilidad que satisfagan la condición:

$$u(x) \geq u(y) \quad \text{si y sólo si} \quad x \, R \, y$$

están relacionadas mediante una transformación monótona creciente.

Siguiendo en el contexto del comportamiento del consumidor, es también importante añadir el supuesto, hecho en la segunda mitad del siglo XIX por los economistas Jevons y Walras, referente a que la utilidad de una n-upla o vector n-dimensional de artículos es la suma de las utilidades de las componentes individuales, es decir,

$$u(x_1 , \ldots , x_n) = u_1(x_1) + \ldots + u_n(x_n)$$

como ya quedó reflejado al tratar la axiomática de Fishburn.

4.6.1.- La utilidad esperada.

La teoría ordinal de Pareto (40), a la que acabamos de hacer referencia en la introducción de este apartado, dominó la teoría económica de la utilidad desde el comienzo de este siglo hasta la publicación del tratado sobre teoría de juegos de Von Neuman-Morgenstern de 1944 (41) que terminó con el supuesto de que el individuo al elegir entre las alternativas posibles, no tiene incertidumbre acerca de las consecuencias de estas alternativas. Una vez que se admite la incertidumbre en las consecuencias, ninguna teoría ordinal de elección puede ser completamente satisfactoria. La hipótesis de la utilidad esperada que fué formulada por primera vez por Daniel Bernoulli (42) es una aproximación importante sugerida para elaborar decisiones en el contexto de resultados inciertos. La idea fundamental es muy simple: el individuo debe elaborar una decisión entre varias alternativas posibles. Estas decisiones tendrán distintas consecuencias, y ordinariamente las consecuencias no estarán solamente determinadas por la decisión tomada sino que estarán afectadas también por el estado de la naturaleza (condiciones o contexto en el que la decisión se toma). Suponemos que el sujeto establece una función de utilidad sobre las consecuencias posibles, y que tiene igualmente establecida una función de probabilidad sobre los posibles estados de la naturaleza. Según la hipótesis de la utilidad esperada, el decisor selecciona una decisión o curso de acción que maximice su utilidad esperada.

En la determinación de la utilidad esperada intervienen, como es lógico, las probabilidades de los estados y la utilidad numérica de las consecuencias que resultan de tomar una decisión con cada uno de los estados posibles, tal como se expuso en la condición [9] del epígrafe 4.4.7.

Como nuestro bojetivo es establecer la relación coordinada de los conceptos preferencia-utilidad-probabilidad subjetiva, no nos extenderemos más sobre este punto de la utilida esperada, que ya habíamos tratado.

4.6.2.- Sistemas de axiomas para la caracterización conjunta de la probabilidad subjetiva y la utilidad.

Consideramos la dirección más importante en la que la aproximación de Von Neuman-Morgestern ha sido generalizada, es decir, la deducción de una función de probabilidad subjetiva numérica así como de una función de utilidad, a partir de los postulados cualitativos sobre preferencias entre elecciones.

En muchas situaciones en las que un individuo debe decidir o elegir entre varias alternativas, no existe una medida de probabilidad cuantitativa disponible para ser usada para evaluar la utilidad esperada de esas alternativas. Por ello, vamos a utilizar un sistema de postulados sobre decisiones que produzcan medidas de utilidad y probabilidad, extendiendo por tanto el dominio de aplicación del principio de la utilidad esperada.

Una pequeña reflexión sobre el problema de las condiciones estructurales de axiomatización conjunta que son suficientes para producir medidas de utilidad y probabilidad subjetiva, sugiere dos formas diferentes de proceder. La primera consiste en intentar formular axiomas de tal forma que obtengamos primero una medida de la utilidad que después será usada para obtener una medida de probabilidad subjetiva. La otra aproximación procede en orden inverso, esto es, formula los axiomas que permiten obtener en primer lugar una medida de la probabilidad subjetiva la cual se usará después para medir la utilidad.

En la <u>aproximación de Ramsey</u> (43) la utilidad se mide en primer lugar. La idea esencial de este autor era encontrar un suceso aleatorio con probabilidad subjetiva 1/2 , entonces usar este suceso para determinar las utilidades de los resultados, y finalmente aplicar la función de utilidad construida para medir las probabilidades subjetivas de los estados de la naturaleza.

Esta teoría se basa en un simple juego de una persona con dos opciones y dos estados de la naturaleza. Para realizar este método, lo primero que hay que dejar claro es que uno puede establecer un suceso aleatorio con probabilidad subjetiva 1/2 sin tener previamente una medida cuantitativa de la probabilidad. El sujeto elegirá entre las dos opciones mostradas en la siguiente matriz:

	E	$\bar{E}$
opción 1	a	b
opción 2	c	d

Si el sujeto elige la opción 1 y si ocurre el suceso E , entonces recibe el resultado a . Sin embargo, si ocurre el suceso $\bar{E}$ recibe el resultado b . Por otra parte, si elige la opción 2 y ocurre el suceso E entonces recibe el resultado c , mientras que si ocurre $\bar{E}$ recibe el resultado d . E y $\bar{E}$ son los estados de la naturaleza siendo $\bar{E}$ el contrario de E .

Si el sujeto elige la opción 1 sobre la opción 2 y si tuvieramos una función de probabilidad subjetiva "s" y una función de utilidad "u" definida sobre las consecuencias o resultados, con el principio de la utilidad esperada subjetiva expresariamos su elección mediante la siguiente desigualdad:

$$[1] \quad s(E) \cdot u(a) + s(\bar{E}) \cdot u(b) \geq s(E)\, u(c) + s(\bar{E}) \cdot u(d)$$

Si el sujeto se manifestase indiferente ante las dos opciones, la desigualdad se convertiría en la siguiente igualdad:

$$[2] \quad s(E) \cdot u(a) + s(\bar{E}) \cdot u(b) = s(E)\, u(c) + s(\bar{E})\, u(d)$$

Ahora intentamos encontrar un suceso E* tal que para todo par de alternativas a y b se verifique:

$$[3] \quad s(E^*)\, u(a) + s(\bar{E}^*)\, u(b) = s(E^*)\, u(b) + s(\overline{E^*}) \cdot u(a)$$

En los términos de la matriz anterior esta última ecuación significa que los resultados de las dos opciones pueden ser expresados ahora como sigue:

	E*	Ē*
opción 1	a	b
opción 2	b	a

Si $u(a) \neq u(b)$ resulta inmediatamente de la igualdad [3] que:

[4] $S(E^*) = S(\bar{E}^*)$

Y en el supuesto de que las probabilidades subjetivas sumen la unidad entonces $s(E^*) = 1/2$. Suponemos que las probabilidades subjetivas satisfacen los axiomas habituales de la teoría de la probabilidad. Entonces hablamos de la medida de probabilidad subjetiva de un suceso, donde el suceso es dado según la interpretación formal usual como un subconjunto de un espacio X. El espacio total X representa al suceso seguro y el conjunto vacio ϕ representa al suceso imposible.

Una medida de probabilidad P sobre los subconjuntos de X ha de satisfacer los siguientes axiomas para cualesquiera A y B subconjuntos de X ; estos son los axiomas de la teoría matemática de la probabilidad de la que ya hablamos en su momento.

Axioma 1. $P(A) > 0$

Axioma 2. $P(X) = 1$

Axioma 3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \phi$

Ya sabemos, como se comentó en el epígrafe 4.4.5 , que se imponen algunas condiciones adicionales cuando el conjunto X es infinito, pero en este momento suponemos que X es finito.

Cuando nos referimos a la medida de probabilidad subjetiva suponemos que los tres axiomas que acabamos de exponer se satisfacen, incluso aunque Edwards (44) y algunos otros autores pongan en duda el que las probabilidades subjetivas satisfagan el axioma 3, de aditividad. En cualquier caso, poniendo E* en la igualdad [2] y usando la igualdad [4] obtenemos evidentemente

$$s(E^*)\ u(a) + s(E^*)\ u(b) = s(E^*)\ u(c) + s(E^*)\ .\ u(d)$$

es decir,

$$u(a) + u(b) = u(c) + u(d)$$

y de esta ecuación deducimos la igualdad de las diferencias de utilidad:

$$u(a) - u(c) = u(d) - u(b)$$

Siguiendo la <u>aproximación de Ramsey</u>, imponemos los axiomas sobre las diferencias de utilidad para garantizar la existencia de la función de utilidad "u" . Para conjuntos finitos de alternativas, estas ideas han sido desarrolladas por Davidson y Suppes (45) y para conjuntos infinitos de alternativas podemos citar a Suppes y a Winet (46) quienes trabajaron sobre ese tema.

Una vez que la medida de utilidad se ha obtenido se añaden otros axiomas simples para justificar en los términos de la igualdad [2] la siguiente medida de probabilidad subjetiva del suceso E . Escribiendo de nuevo la igualdad [2] :

$$s(E)\ u(a) + s(\bar{E})\ u(b) = s(E)\ u(c) + s(\bar{E})\ u(d)$$

sacando factor común P(E)

$$\begin{aligned} s(E)\ (u(a) - u(c)) = s(\bar{E})\ (u(d) - u(b)) &= (1 - s(E)). \\ .(u(d) - u(b)) &= u(d) - u(b) - \\ &- s(E)\ (u(d) - u(b)). \end{aligned}$$

entonces

$$s(E)\ (u(a) - u(c) + u(d) - u(b)) = u(d) - u(b)$$

por tanto

$$[5] \qquad \boxed{s(E) = \frac{u(d) - u(b)}{u(a) - u(c) + u(d) - u(b)}}$$

Para produndizar en el análisis formal de esta aproximación de Ramsey que empieza estableciendo la función de utilidad para después determinar las probabilidades subjetivas de los estados de la naturaleza, nos situamos en los axiomas de De Finetti para la probabilidad cualitativa formulados mediante la relación "más probable que" , para garantizar la existencia de una medida de probabilidad que refleje la estructura de orden de la relación.

Sea $\geq$ la relación "más probable que" (débilmente). Para establecer formalmente los axiomas es conveniente suponer que esta relación $\geq$ se establece entre sucesos que son subconjuntos de un espacio total X . Es decir, usamos las nociones de la teoría de conjuntos para representar los sucesos. Con el espacio X y la relación $\geq$ pasamos a definir la estructura de probabilidad cualitativa a la que ya se hizo referencia en el epígrafe 4.4.3 , cuyos axiomas son los de De Finetti (expuestos en 4.4.1).

DEFINICION 2. Un par $(X , \geq)$ es una estructura de probabilidad cualitativa si se cumplen los siguientes axiomas, para cualesquiera A , B , C subconjuntos de X .

Axioma 1. Si $A \geq B$ y $B \geq C$ entonces $A \geq C$

Axioma 2. $A \geq B$ ó $B \geq A$

Axioma 3. Si $A \cap C = \phi$ y $B \cap C = \phi$ entonces $A \geq B$ si y sólo si $A \cup C \geq B \cup C$

Axioma 4. $A \geq \phi$

Axioma 5. no $\phi \geq X$

Los dos primeros axiomas establecen que la relación $\geq$ es un orden débil de los subconjuntos de X . El tercer axioma formula, en términos cualitativos, el principio esencial de aditividad para sucesos mutuamente excluyentes. El cuarto axioma establece que cualquier suceso es más probable que el suceso imposible y el quinto axioma establece que el suceso seguro es estrictamente más probable que el suceso imposible. Teniendo en cuenta que la relación "estrictamente más probable" $>$ se define por

$$A > B \quad \text{si y sólo no} \quad B \geq A$$

entonces el quinto axioma se podrá formular también como: $X > \phi$

Formulamos a continuación algunos teoremas que permitan reconocer las propiedades que tiene esta estructura de probabilidad cualitativa. En estos teoremas es conveniente utilizar la relación "menos probable que" definida de la siguiente forma:

$$A \leq B \quad \text{si y sólo si} \quad B \geq A$$

Teorema 1.

Si $A \subseteq B$ entonces $A \leq B$

Teorema 2.

Si $\phi < A$ y $A \cap B = \phi$ entonces $B < A \cup B$

Teorema 3.

Si $A \geq B$ entonces $\bar{B} \geq \bar{A}$

Teorema 4.

Si $A \geq B$ y $C \geq D$ y $A \cap C = \phi$

entonces

$$A \cup C \geq B \cup D$$

Teorema 5.

Si $A \cup B \geq C \cup D$ y $C \cap D = \phi$

entonces

$$A \geq C \quad ó \quad B \geq D$$

Teorema 6.

Si $B \geq \bar{B}$ y $\bar{C} \geq C$ entonces

$B \geq C$

Con estas propiedades reflejadas en los teoremas, nos preguntamos si se garantiza la existencia de una medida de probabilidad numérica P tal que para cualesquiera subconjuntos A y B de X se verifica que:

[6] $\quad P(A) \geq P(B)$ si y sólo si $A \geq B$

Si X es un conjunto infinito los axiomas de la definición 2 no son suficientemente fuertes para garantizar la existencia de tal medida de probabilidad. Sin embargo, si se añaden supuestos estructurales especiales a los axiomas de la definición 2 es posible garantizar la existencia de la medida de probabilidad que satisfaga la condición [6] . Una solución para el caso finito ha sido encontrada por Scott, del que ya hablamos en el epígrafe 4.4.6. También encontraron condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una medida de probabilidad Kraft y otros autores, pero sus condiciones multiplicativas son difíciles de entender. Sin embargo, como también comentamos al tratar anteriormente la axiomática de Scott, la formulación de Scott gana en simplicidad y claridad. La idea central de la formulación de este autor, recordemos que era imponer una condición algebráica sobre las funciones características de los sucesos. Scott comienza estableciendo la relación binaria $\geq$ sobre el conjunto de todos los subconjuntos de X , siendo X un conjunto finito y no vacio, entonces la estructura $(X , \geq)$ satisface una serie de axiomas que no repetiremos aquí ahora pues se encuentran en el epígrafe 4.4.6. A continuación Scott establece que la condición necesaria y suficiente para que exista una medida de probabilidad P que satisfaga la condición [6] es que se cumplan dichos axiomas (este teorema también se encuentra enunciado en el epígrafe 4.4.6).

Si X es infinito se han demostrado algunas condiciones estructurales fuertes que son suficientes pero no necesarias. Por ejemplo, De Finetti (47) y Koopman (48) usaron un axioma para que exista una partición de X , de forma arbitraria, en sucesos equivalentes en probabilidad y este axioma, junto con el de la definición 2 , es suficiente para probar la existencia de una medida de probabilidad numérica. Podemos añadir que Scott ha mejorado estos resultados anteriores para el caso infinito y ha encontrado propiedades que son necesarias y suficientes, pero que no formularemos aquí para no extendernos en exceso en este epígrafe.

Nuestra intención, es este epígrafe, era considerar conjuntos de axiomas que caractericen a la utilidad y probabilidad subjetiva de manera conjunta. Hemos hablado de las aproximaciones de Ramsey, De Finetti y Scott como aproximaciones alternativas, no haciendo más que breves referencias a estos dos últimos ya que habíamos expuesto sus teorías con anterioridad.

Siguiendo nuestro objetivo comentamos este estudio conjunto de utilidad y probabilidad subjetiva con la axiomática de Savage, ya que este es el más conocido conjunto de axiomas que hemos estudiado.

Savage parte de una relación de preferencia débil $\leq$ sobre las decisiones o acciones siendo las decisiones funciones del conjunto S de los estados de la naturaleza en el conjunto F de las consecuencias. En términos de la relación $\leq$ es completamente sencillo definir una relación correspondiente de preferencia sobre las consecuencias, y una probabilidad comparativa sobre los estados de la naturaleza. Suponiendo estas dos relaciones adicionales, los siete postulados de Savage que ya fueron formulados en el epígrafe 4.4.3. nos van a servir como base para establecer un teorema -que veremos más adelante- que garantiza la existencia conjunta de una función de probabilidad subjetiva sobre los estados y una función de utilidad sobre las consecuencias. Exponemos brevemente esos axiomas, con una interpretación más ajustada a nuestros propósitos en este epígrafe, para dejar constancia aquí de las hipótesis de este importante teorema.

1. La relación $\leq$ es un orden débil en el conjunto $\bar{F}$ de las decisiones.

2. Dadas dos decisiones restringidas a un subconjunto de los estados, entonces una es debilmente preferida a la otra.

3. Dadas dos decisiones, que tienen un resultado o consecuencia constante sobre un subconjunto B de los estados de la naturaleza, entonces una decisión es debilmente preferida a la otra, dado el suceso B, si y sólo si el resultado constante de la primera decisión es débilmente preferido al de la segunda decisión.

4. Para cualesquiera dos conjuntos de estados de la naturaleza A y B uno es débilmente más probable que el otro, es decir: $A \leq B$ ó $B \leq A$

5. Todas las consecuencias no son igualmente preferidas.

6. Si la decisión $\bar{g}$ es estrictamente preferida a $\bar{h}$ entonces existe una partición finita de S tal que si $\bar{g}'$ coincide con $\bar{g}$ y $\bar{h}'$ coincide con $\bar{h}$ excepto en un elemento de la partición, en la cual $\bar{g}'$ y $\bar{h}'$ tienen la misma consecuencia f entonces $\bar{g}$ es estrictamente preferida a $\bar{h}'$ y $\bar{g}'$ es estrictamente preferida a $\bar{h}$.

7. Si cualquier consecuencia posible de la decisión $\bar{g}$ es al menos tan atractiva como la decisión $\bar{f}$ entonces $\bar{g}$ es débilmente preferida a $\bar{f}$.

Sobre la base de estos axiomas, Savage prueba el siguiente teorema:

TEOREMA (Recordemos la notación utilizada en el epígrafe 4.4.3)

Si (S , F , $\bar{F}$, $\leq$) es un sistema que satisface los postulados anteriores (1 a 7) entonces existe una función de probabilidad subjetiva P sobre los subconjuntos de S y una función de utilidad u sobre F , tal que, para cualquier partición finita, $S_1, S_2, \dots, S_n$ de S y cualesquiera funciones $\bar{f}$ y $\bar{g}$ de $\bar{F}$ constantes sobre los elementos de la partición

$$\bar{f} \leq \bar{g} \quad \text{si y sólo si} \quad \sum_i P(S_i)\, u\,[\bar{f}(S_i)] \leq \sum_i P(S_i)\, u[\bar{g}(S_i)]$$

Desde el punto de vista del comportamiento el inconveniente más serio de la teoría de Savage y de todas las similares a ésta es el uso de las decisiones que tienen un resultado o consecuencia constante independiente de los estados de la naturaleza. En la práctica real es raro que tales decisiones sean realizables. Desafortunadamente parece no ser un método sencillo de poner en práctica. En la discusión técnica de Savage, las decisiones constantes se usan para definir la ordenación sobre las consecuencias y sobre los estados.

Volviendo a la línea general del tema que nos ocupa, en que las medidas de probabilidad subjetiva y utilidad se establecen en un sólo estudio e incluso a veces en la misma sesión experimental y las prediciones se hacen a partir de ambas medidas, podemos decir que en general la medida de utilidad precede a la medida de probabilidad subjetiva.

El primer intento de medir la probabilidad subjetiva experimentalmente fué realizado por Preston y Baratta (49). Masanao Toda (50) propuso un método de juego bipersonal para medir la probabilidad subjetiva que es muy similar al procedimiento de juego de subasta de Preston y Baratta.

Es importante también recordar la axiomática de Fishburn que expusimos en 4.4.7. la cual proporciona una distribución de probabilidad única sobre los estados de la naturaleza en el contexto de un modelo de utilidad esperada, y este modelo es consistente con la relación $\preccurlyeq$ "no es preferido a". Fishburn establece así el modelo: si S es el conjunto de los estados de la naturaleza, X el conjunto de las consecuencias, F el conjunto de las acciones de S en X, siendo $f \in F$, $s \in S$ $f(s) \in X$ (recordemos que esta notación es distinta a la usada por Savage, y que durante todo el trabajo respetamos las notaciones originales de los distintos autores). Entonces, bajo los axiomas expuestos en 4.4.7., existe una función de valores reales "u" sobre X y una medida de probabilidad finitamente aditiva, π sobre el conjunto de todos los subconjuntos de S, tal que para todo f, $g \in F$:

$$f \preccurlyeq g \quad \text{si y sólo si} \quad E\,[u(f(s)\,,\pi] \leq E\,[u(g(s))\,,\pi]$$

condición que es equivalente a la [9] del epígrafe 4.4.7., ya que $E\,[u(f(s))\,,\pi]$ (y análogamente $E\,[u(g(s)\,,\pi]$) es la esperanza matemática de $u(f(s))$ con respecto a la medida de probabilidad π .

La medida de probabilidad π está determinada de manera única y la función de utilidad "u" es única salvo una transformación lineal positiva. La función "u" puede estar o no acotada, sin embargo, está acotada si existe una partición numerable de S donde cada elemento de la partición tiene probabilidad positiva respecto de π . No hay restricciones sobre S y X excepto que son conjuntos no vacios y X contiene al menos dos elementos.

Fishburn en un estudio posterior (51) generaliza la aproximación anterior y en particular introduce una axioma de preferencia que implica que π es numerablemente aditiva.

Merece la pena también señalar el estudio realizado a este respecto por Pedro E. Ferreira (52) donde sobre la base de un método axiomático caracterizado por un doble uso de la teoría de la utilidad de Von Neuman-Morgestern y una condición de continuidad monotona sobre $\lesssim$, similar a la usada por Villegas, cuya teoría expusimos en el epígrafe 4.4.5., da una definición constructiva de probabilidad subjetiva semejante a la de Anscombe y Aumann. La continuidad monótona capacita para probar la σ-aditividad de la probabilidad π , cuestión resuelta por Villegas en el epígrafe citado.

NOTAS AL CAPITULO IV.

(1) James BERNUOLLI. Ars Conjectandi. Basilea 1713.

(2) Cedric A. B. SMITH. "Personal Probability and Statistical Analysis". Journal of the Royal Statistical Society. 1965, serie A, vol. 128, pág. 479.

(3) Bruno DE FINETTI. "La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives". Annales de l'Institut Henri Poincaré, 1937, vol. 7, pp: 1-68.

(4) R. L. WINKLER. "The consensus of subjective probability distributions". Management Science, vol. 15, nº 2, 1968, pp: 61-75.

(5) R. B. WILSON. "The theory of sindicates". Econometrica, 1968, vol. 36 nº 1, pp: 119-131.

(6) N. DALKEY. "An experimental study of group opinion". Futures 1969, vol. 1, nº 3, pp: 408-426.

(7) B. DE FINETTI. "Method for Discriminating Levels of Partial Knowledge concerning a Test Item". The British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 1965, vol. 18, pág. 117.

(8) Robert L. WINKLER. "The Assessment of Prior Distributions in Bayesian Analysis". Journal of The American Statistical Association, 1967, vol. 62 pp: 776-800.

(9) C. VILLEGAS. "On qualitative probability σ-algebras" Annals of Mathematical Statistics, 1964, vol. 35, p. 1787.

B. DE FINETTI. "Sul significato soggetivo della probabilita". Fundamenta Mathematicae, 1931, vol. 17, pp: 298-329.

(10) B. DE FINETTI, 1937, op. cit.

(11) Bernard O. KOOPMAN. "The axioms and algebra of intuitive probability". Annals of Mathematics, 1940, vol. 41, nº 2, pp: 269-292.

(12) Leonard J. SAVAGE. The Foundations of Statistics, Ed. Wiley New York, 1954, pág. 4.

(13) Idem. pág. 5.

(14) John VON NEUMANN y Oskar MORGENSTERN. Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press, 1947 (2ª edición).

(15) L.J. SAVAGE, 1954, op. cit. pág. 9.

(16) Idem. pág. 13.

(17) F. J. ANSCOMBE y R. J. AUMANN. "A definition of subjective probability". Annals of Mathematical Statistics, 1963, vol. 34, pp: 199-205.

Puede encontrarse otra versión de esta axiomática, así como la demostración del Teorema enunciado en ella en:

J. GARCIA AGUADO. Analisis Borroso y Teoría de la Decisión. Tesis Doctoral. Madrid, 1984. pp. 107-117.

(18) C. VILLEGAS. 1964, op. cit.

(19) L. J. SAVAGE, 1954, op. cit., pp: 36-37.

(20) M. H. STONE. "Theory of representation for Boolean algebras" Transactions of the American Mathematical Society, 1936, vol. 40, pp: 37-111.

(21) F. P. RAMSEY. "Truth and probability" en The Foundations of Mathematics and other Logical Essays. Routledge and Kegan Paul, London, 1931, pp: 156-198.

(22) P. SUPPES. "The role of subjective probability and utility in decision-making". Proceedings of The Third Berkeley Symposium on Mathematical Statitstics and Probability, 1955, vol. 5. University of California Press. pp: 61-73.

(23) D. DAVIDSON y P. SUPPES. "A finitistic axiomatization of subjective probability and utility". Econometrica 1956, vol. 24, nº 3, pp: 264-275.

(24) J. W. PRATT, H. RAIFFA y R. SCHLAIFER. "The Foundations of decision under uncertainty: an elementary exposition". Journal of the American Statistical Association, 1964, vol. 59, pp: 353-375.

(25) I. N. HERSTEIN y J. MILNOR. "An axiomatic approach to measure utility". Econometrica, 1953, vol. 21, pp: 291-297.

(26) P. SUPPES. "The Measurement of Belief". Journal of the Royal Statistical Society, 1974, serie B, vol. 36, nº 2, pág. 168.

(27) I. J. GOOD. "Subjective probability as the measurement of a non-measurable set" en Logic, Methodology and Philosophy of Science: Proceedings of 1960 International Congress. (E. Nagel, P. Suppes y A. Tarski, eds.). Stanford: Stanford University Press 1962.

(28) L. J. SAVAGE. The Foundations of Statistics, 2ª edición: ed. Dover, New York, 1972.

(29) R. D. LUCE y D. H. KRANTZ. "Conditional Expected Utility" Econometrica, 1971, vol. 39, pp: 253-271.

(30) M. H. DeGROOT. Optimal Statistical Decisions., Mc Graw Hill, New York, 1970.

(31) J. N. PRATT, H. RAIFFA y R. SCHLAIFER, 1964, op. cit.

(32) R. L. WINKLER y A. H. MURPHY. "Good Probability Assesors". Journal of Applied Meteorology, 1968, vol. 7, pp: 751-758.

(33) R. L. WINKLER. "The Quantification of Judgement: some Methodological Suggestions". Journal of The American. Statistical Association, 1967, vol. 62, pág. 1107.

(34) M. STONE. "The opinion pool". Annals of Mathematical Statistics 1961, vol. 32, pp: 1339-1342.

(35) R. L. WINKLER. "The Quantification of ..." 1967. op. cit. pp: 1105-1120.

(36) Harry V. ROBERTS. "Probabilistic Prediction". Journal of the American Statistical Association, 1965 vol. 60, pp: 50-62.

(37) M. H. DeGROOT. "Reaching a Consensus". Journal of the American Statistical Association, 1974, vol. 69, pp: 118-121.

(38) E. EISENBERG y D.GALE."Consensus of subjective probabilities: The Pari-Mutuel method". Annals of Mathematical Statistics, 1959, vol. 30, pp: 165-168.

(39) R. L. WINKLER. "The Consensus of ..." op. cit. 1968.

(40) Vilfredo PARETO. Manuale di economia politica, con una introduzione ulla scienza sociale. Milan, Italy: Societa Editrice Libraria, 1906.

(41) J. VON NEUMANN y O. MORGENSTERN. 1947. op. cit.

(42) D. BERNOULLI. "Specimen theoriae novae de mensura sortis". Comentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae, 1738, vol. 5, pp: 175-192 (Traducido por L. Sommer en Econometrica, 1954, vol. 22, pp: 23-36).

(43) F. P. RAMSEY. 1931. op. cit.

(44) W. EDWARDS. "Subjective probabilities inferred from decisions" Psychological Review, 1962, vol. 69, pp: 109-135.

(45) D. DAVIDSON y P. SUPPES. 1957. Op. cit.

(46) P. SUPPES y Muriel WINET. "An axiomatization of utility based on the notion of utility differences". Management Science, 1955, vol. 1, pp: 259-270.

(47) B. DE FINETTI. 1937. Op. cit.

(48) B. O. KOOPMAN. "The bases of probability". Bulletin of the American Mathematical Society, 1940, vol. 46, pp: 763-774.

(49) M. G. PRESTON y P. BARATTA. "An experimental study of the auction-value of an uncertain outcome". American Journal of Psychology, 1948, vol. 61 pp. 183-193.

(50) Masanao TODA. "Measurement of intuitive probability by a method of game", Japanese Journal of Psychology, 1951, vol. 22, pp: 29-40.

(51) P. C. FISHBURN. "Subjective expected utility with mixture sets and Boolean algebras". Annals Mathematical Statistics, 1972, vol. 43, pp: 917-927.

(52) Pedro E. FERREIRA. "On subjective probability and expected utilities". Annals of Mathematical Statistics, 1972, vol. 43, nº 3, pp: 928-933.

C A P I T U L O   V

UNA METODOLOGIA PARA EXTRAER PROBABILIDADES SUBJETIVAS DE UN DECISOR

CAPITULO V : UNA METODOLOGIA PARA EXTRAER PROBABILIDADES SUBJETIVAS DE UN DECISOR.

5.1.- Introducción

Al aplicar el método de los árboles de decisión bayesiana, uno de los más difíciles problemas que se presenta es conseguir que un decisor individualizado proporcione su evaluación subjetiva de las probabilidades de "n" sucesos mutuamente excluyentes y exhaustivos con influencia aleatoria. Algunos de los métodos aplicados para resolver este problema han sido los de Brown, Kahan y Peterson (1), Hogarth (2) y Schlaifer (3).

En este capítulo se presentará una metodología para resolver el problema mencionado basado en la obtención del autovector correspondiente al autovalor máximo de una matriz, formando dicha matriz con las comparaciones entre las probabilidades de cada uno de los sucesos tal y como son observadas por el decisor. Este método fué desarrollado por Saaty (4) para evaluar los efectos de distintos factores en sistemas jerárquicos y fué usado por Yager (5) para comparar la importancia de las restricciones y objetivos difusos en una decisión difusa.

Saaty, al proponer este método (Ver Saaty, 1977, en (4)), estaba interesado en desarrollar una escala de intensidad de la importancia de unas componentes para la formación de conceptos de más alto orden a partir de los de orden inferior. En el trabajo de Saaty y Khouja (6) se hace referencia al concepto de la influencia de una nación cualquiera en el mundo, suponiendo que esta influencia estaría determinada por cinco factores: recur sos humanos, riqueza, comercio, tecnología y poder militar. En este caso, la influencia de esa nación en el mundo sería el concepto de más alto orden al que hacíamos referencia más arriba, mientras que los cinco factores que constituyen esa influencia serían aquellos que hemos dado en llamar componentes o conceptos de orden inferior. Lo que los autores pretenden en su trabajo es asociar a cada una de las componentes un número positivo que indique la importancia que dicha componente tiene en la influencia de esa nación en el mundo. Tal y como queda formulado por Saaty y Khouja, es sicológicamente más fácil para la mayoría de los individuos formar juicios por parejas entre dos objetos particulares que construir un orden completo entre los "n" objetos. Los artículos de Saaty proponen un procedimiento para construir un vector $W = (w_1 , w_2 , \ldots , w_n)$ donde las w_i son las ponderaciones deseadas que expresan la importancia de cada una de las componentes. Estas ponderaciones son todas positivas y su suma es la unidad. El vector W se obtiene a partir de una matriz cuyos elementos son comparaciones por parejas de las componentes, para evitar -como antes señalamos- el problema, sicológicamente más complicado, de comparar todos los objetos a la vez.

Para hacer estas comparaciones por parejas, por ejemplo, para realizar la comparación entre "a" y "b" , el individuo debe responder a dos cuestiones: en primer lugar, debe decidir cual de ellos dos -"a" o "b"- es más importante, para después seleccionar una número entero -en una escala del 1 al

9- como medida de la relación por cociente de la preferencia del objeto más preferido sobre el menos preferido. Estos números enteros seleccionados no serán, sin embargo, las ponderaciones deseadas puesto que se asignan como una medida de los cocientes entre las ponderaciones dos a dos w_a / w_b . Seaty da un significado lingüistico a los números impares de la escala y sugiere que los números pares se usen como valores de compromiso entre dos valores impares. De este modo, si se asigna el valor tres, por ejemplo, al cociente entre w_a y w_b , indicaría que "a" es más importante que "b" en una escala de 1 a 9. Esta relación se establece entre las componentes del concepto de orden superior que comentábamos anteriormente. El problema entonces consiste en obtener el vector de ponderaciones a partir de estas estimaciones de los cocientes entre los propios w_i .

Construiremos entonces una matriz A formada por estas comparaciones dos a dos en la forma que se expondrá posteriormente. Si tenemos n elementos para ordenar, la dimensión de esta matriz sería n x n . Las ponderaciones deseadas se obtendrán a partir del autovector asociado con el mayor autovalor de esta matriz A .

El propósito de este capítulo será describir esta metodología y extender su aplicabilidad para la obtención de probabilidades subjetivas. Por ello, una vez descrita la metodología a emplear en el epígrafe 5.2., reservaremos el último epígrafe de este capítulo, que será con el que cerraremos nuestro trabajo, para aplicar dicha metodología a un caso práctico que consistirá en la obtención de probabilidades subjetivas mediante el método de autovalor. Con datos reales, obtenidos en la Bolsa de Comercio de Madrid, intentaremos obtener la probabilidad subjetiva de que un valor sea más rentable que los restantes, teniendo en cuenta la información sobre las cotizaciones de dichos valores durante un periodo de tiempo determinado. De esta manera, considerando este planteamiento para cada valor, calcularemos la probabilidad de invertir en cada uno de dichos valores.

5.2.- El método del autovalor

En la elaboración de decisiones bayesiana una tarea presentada al analista es la de extraer del decisor sus evaluaciones subjetivas para un conjunto discreto finito de sucesos mutuamente excluyentes y exhaustivos. Es decir, tenemos un conjunto de sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y queremos obtener el conjunto de probabilidades $P_1, P_2, \ldots, P_n$ asociadas a cada uno de los sucesos con la condición de que $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$. Además, las consideraciones subjetivas del decisor se usan para determinar los valores de las probabilidades.

Supongamos que hemos obtenido de alguna manera estas probabilidades. Entonces consideramos la matriz M constituida por los cocientes de estas probabilidades, esto es:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{P_1}{P_1} & \frac{P_1}{P_2} & \frac{P_1}{P_3} & \cdots & \frac{P_1}{P_n} \\ \frac{P_2}{P_1} & \frac{P_2}{P_2} & \frac{P_2}{P_3} & \cdots & \frac{P_2}{P_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{P_n}{P_1} & \frac{P_n}{P_2} & \frac{P_n}{P_3} & \cdots & \frac{P_n}{P_n} \end{bmatrix}$$

Observemos que la matriz M cumple las siguientes propiedades:

1. Cada elemento de la matriz m_{ij} se obtiene de la forma

$$m_{ij} = \frac{P_i}{P_j}$$

2. Todos los elementos de la diagonal son iguales a 1.

$$m_{ii} = 1$$

3. $$m_{ji} = \frac{P_j}{P_i} = \frac{1}{m_{ij}}$$

Las propiedades 1 , 2 y 3 se llaman propiedades de consistencia de la matriz M . Consideremos ahora el producto de M por el vector X cuyas componentes son las probabilidades P_1 , P_2 , ... , P_n

$$X = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n \end{bmatrix}$$

$$
M\,X = \begin{bmatrix} \frac{P_1}{P_1} & \frac{P_1}{P_2} & \text{-----} & \frac{P_1}{P_n} \\ \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} \\ \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} \\ \frac{P_n}{P_1} & \frac{P_n}{P_2} & \text{-----} & \frac{P_n}{P_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\,P_1 \\ n\,P_2 \\ \vdots \\ n\,P_n \end{bmatrix} =
$$

$$
= n \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} = n\,X \qquad [1]
$$

Por tanto "n" es un autovalor o valor propio de la matriz M . Esto es, "n" satisface la ecuación:

$$
\det.\ (M - \lambda I) = 0
$$

siendo I la matriz unidad del conjunto de matrices de dimensión n x n , y X es un autovector asociado con ese autovalor. Saaty (Ver (4), 1977) ha demostrado que M debido a su estructura especial es una matriz de dimensión n x n y rango 1. La matriz M tiene n-1 autovalores que son "0" , y el autovalor que queda, es decir el λ-máximo, es "n" .

El problema real consiste, sin embargo, en extraer las probabilidades P_i del decisor en la situación en que éstas sean desconocidas. El problema de extraer las probabilidades subjetivas está lleno de riesgo. Aunque el decisor puede tener creencias sobre que sucesos son más probables, al probar a elaborar todas las creencias subjetivas dentro de una escala inflexible, esto es generalmente bastante difícil, sobre todo cuando el número "n" llega a ser grande. Sin embargo, es más fácil para el decisor comparar sólo dos sucesos a la vez. El desarrollo teórico que acabamos de exponer sirve como base para nuestro método. Así, si conseguimos que el decisor nos proporcione su estimación de los cocientes de probabilidades de los distintos sucesos que pueden ocurrir, estos valores pueden usarse para formular una matriz, y a partir de esta matriz, podemos generar las probabilidades subjetivas de la forma que anteriormente se comentaba.

En primer lugar, pedimos al decisor que proporcione su valoración subjetiva de que suceso A_i o A_j es más probable que ocurra, es decir, cual de los dos sucesos tiene la mayor probabilidad de ocurrencia. Después le pedimos que exprese el cociente entre la probabilidad del suceso más probable sobre la probabilidad del suceso menos probable, y llamaremos a este cociente la verosimilitud de A_i sobre A_j, supuesto que A_i sea preferido a A_j. Saaty, en el artículo citado, ha propuesto un esquema de puntuación con el cual valorar esta cuestión, y sugiere una escala de números enteros del 1 al 9 en el cual los valores pueden interpretarse como se muestra en la siguiente tabla:

VALOR	SIGNIFICADO
1	igualmente probable
3	verosimilitud débil de uno sobre otro
5	verosimilitud fuerte de uno sobre otro
7	verosimilitud manifiesta de uno sobre otro
9	verosimilitud absoluta (máxima) de uno sobre otro.
2 , 4 , 6 , 8	valores intermedios entre dos juicios contiguos.

Hay que indicar que no es necesario presentar los valores lingüisticos asociados con la escala de puntos, sino que el decisor podría presentarse con una valoración propia de los números en la escala del 1 al 9 , a partir de la cual se pueden hacer las comparaciones. La experiencia nos lleva a pensar que en principio presentar al decisor las asociaciones lingüisticas le causa problemas en su proceso de selección. También conviene observar aquí que suponemos que las probabilidades de los sucesos son comparables, es decir, que tienen similar magnitud.

Teniendo en cuenta todas estas cuestiones, consideramos una matriz B de dimensión n x n que se puede construir de la siguiente manera: el decisor compara A_i y A_j según la escala de valores anterior, y selecciona un número que depende del grado de preferencia. Sin pérdida de generalidad, suponemos que A_i es preferido a A_j. Luego asignamos este número al elemento b_{ij} de la matriz B, y asignamos $b_{ji} = 1 / b_{ij}$. Hacemos esto mismo para todos los pares hasta completar todos los elementos de la matriz B, teniendo en cuenta que $b_{ii} = 1$. La matriz B por tanto será un reflejo de la evaluación subjetiva del decisor de las probabilidades de los distintos sucesos, y dicha matriz se construye de tal forma que de ahora en adelante consideraremos que es la aproximación de la única matriz teórica M, presentada al principio de este epígrafe. Puesto que la matriz B es una aproximación de la matriz M, lo que hemos expuesto anteriormente sugiere una forma natural de obtener las probabilidades a partir de la matriz B. Es decir, podemos encontrar el autovalor máximo de B que representaremos por λ-máx y luego encontrar el autovector unitario $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ asociado a dicho autovalor, siendo el autovector unitario aquel cuyas componentes suman la unidad. Por tanto, las componentes $Y_1, \ldots, Y_n$ del autovector son las probabilides subjetivas del decisor tal y como fueron representadas en la matriz B.

Veamos un ejemplo para dejar expuesto de forma clara como se aplica esta metodología:

Supongamos que en algún momento de un proceso de decisión, el decisor debe decidir sobre las probabilidades que tiene su competidor de fabricar uno de los tres productos X , Y , y Z .

Un analista, después de un número considerable de preguntas, extrae la siguiente información del decisor:

- Fabricar el producto Y es tres veces más probable que fabricar el producto X .

- Fabricar el producto Z es alrededor de dos veces más probable que fabricar el producto X .

- Fabricar el producto Y es tres veces más probable que fabricar el producto Z .

A partir de la información anterior obtenemos la siguiente matriz:

$$B = \begin{array}{c} \\ X \\ Y \\ Z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Aplicamos el método expuesto y obtenemos el autovalor máximo y su autovector unitario asociado, teniendo en cuenta que si se cumplen las condiciones de consistencia en la matriz, el autovector unitario asociado al autovalor máximo es único. En este ejemplo aunque la matriz no es consistente debido a que $b_{13} \neq 1/b_{31}$, sin embargo, al determinar los autovalores de la matriz como soluciones de la ecuación:

$$\det. (B - \lambda I) = 0$$

el autovalor máximo, como puede comprobarse, tiene grado de multiplicidad 1 , y por tanto, un sólo autovector unitario asociado.

Al resolver la ecuación:

$$\det. (B - \lambda I) = 0$$

obtenemos tres autovalores, siendo el autovalor máximo:

$$\lambda \text{ máx.} = 2{,}9635$$

y el autovector unitario asociado lo obtenemos resolviendo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = 2{,}9635 \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

tal y como indicábamos en [1] . Con la notación del problema real esto sería:

$$B\ P = \lambda P$$

siendo

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

El valor obtenido para el autovector unitario P es:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}145 \\ 0{,}604 \\ 0{,}251 \end{bmatrix}$$

Observemos que el autovector P es el vector referido en el primer epígrafe de este capítulo.

Las probabilidades de que el competidor de nuestro problema fabrique los productos X , Y y Z son:

$$P_x = 0{,}145 \qquad P_y = 0{,}604 \qquad P_z = 0{,}251$$

siendo $P_x + P_y + P_z = 1$

Es decir, estos valores serían una evaluación de las probabilidades subjetivas de estos sucesos tal y como son observados por el decisor.

Este método permite valoraciones inexactas como la referida en el ejemplo anterior cuando expresa: "fabricar el producto Z es alrededor de dos veces más probable que fabricar el producto X". Esta inexactitud o ambigüedad queda recogida en la matriz empírica escribiendo $b_{31} = 2$ y $b_{13} = 1/3$. Si la valoración hubiese sido exacta ("dos veces más probable") habríamos escrito $b_{13} = 1/2$. Como la valoración es inexacta cabrían dos posibilidades para el valor $b_{13} = 1$ ó $b_{13} = 1/3$, y consideraremos más adecuado $b_{13} = 1/3$. Esta valoración inexacta nos lleva a una inconsistencia en la matriz. De este problema de la inconsistencia hablamos inmediatamente.

Hay que indicar que el hecho crucial que conduce a los resultados 'redondos' que se obtienen en la parte teórica es la estructura especial que tiene la matriz M. Esta estructura especial está determinada por el hecho de que:

$$m_{ij} \cdot m_{jk} = m_{ik}$$

Esto es debido a que $m_{ij} = P_i/P_j$

$$m_{ik} = P_j/P_k$$

y por tanto

$$P_i/P_j \cdot P_j/P_k = m_{ij} \cdot m_{jk} = P_i/P_k = m_{ik}$$

A esta condición se le llama propiedad de consistencia de la matriz M. Dicha propiedad transitiva se cumple si se cumplen las propiedades del consistencia enunciadas anteriormente.

En la construcción de la matriz empírica B no estamos seguros de conseguir esta condición de consistencia. La experiencia demuestra que tales matrices empíricas construidas mediante comparaciones dos a dos pueden no ser consistentes. Sin embargo, el método propuesto por Saaty no requiere la consistencia. Lograremos, por tanto, una selección de ponderaciones positivas a partir de una matriz B que es, en algunas ocasiones , manifiestamente inconsistente (como la del ejemplo). La interpretación de la confianza depositada en tal vector de probabilidades, si la matriz no es consistente, es algo ambigua. Sin embargo, si la matriz B no es demasiado inconsistente, entonces las percepciones fundamentales del decisor no serán demasiado inconsistentes y, por tanto, nuestra metodología es una buena forma de extraer sus probabilidades. Saaty ha demostrado que el λmáx es una buena medida de la consistencia de la matriz B , ya que si el decisor fuera perfectamente consistente obtendríamos que el $\lambda max = n$. Cuanto más inconsistentemente se sea en la construcción de la matriz B más diverge λmáx. de "n" , esto nos lleva a sugerir que $(\lambda max - n)/n$ se use como medida de la consistencia. De tal manera que cuanto mayor sea el cociente $(\lambda max - n)/n$, más inconsistente es la matriz B . Por tanto, si obtenemos que el máximo autovalor de B está próximo a "n" , entonces podríamos juzgar que la matriz B forma una base adecuadamente razonable para construir las ponderaciones, como ocurre en el ejemplo donde el $\lambda max = 2,9635$ y $n = 3$.

Si el λmax diverge de "n" o la matriz B tiene algunas inconsistencias e intrasitividades notorias, se le puede presentar esta información al decisor y pedirle que reconsidere su selección de preferencias para probar a formar una matriz más consistente.

5.3.- Comparación con otros métodos

Al intentar evaluar el procedimiento propuesto se ha inventado un método para comparar este método con otros procedimientos usados frecuentemente para obtener probabilidades subjetivas. Comentaremos brevemente los resultados de este experimento del que pueden encontrarse más detalles en el trabajo de Wade y Yager (7) y en otro trabajo también de Wade (8).

Los métodos que se comparan en este experimento son:

1. Método de asignación directa de probabilidades a los sucesos.

   En este método se les presentó a los sujetos una descripción de una situación hipotética, y después se pide a los sujetos que evaluen las probabilidades de los distintos sucesos que aparecen en la descripción. El método requiere que el sujeto escriba la probabilidad de un suceso próximo al suceso en cuestión. Después el sujeto tiene que distribuir estas probabilidades para que la suma total sea 1 .

2. Método de la probabilidad "P".

   En este caso, después de presentada la descripción de una situación a cada uno de los sujetos, se les pide que elijan el suceso que crean más probable, y a este suceso se le asigna una probabilidad "P" . Luego se le pide al sujeto que evalue los otros sucesos en forma de una fracción de "P", y con esta información se calculan las distintas probabilidades.

3. <u>Método del autovalor.</u>

Este método es el descrito en el epígrafe anterior.

Para contrastar estos tres métodos se describieron situaciones hipotéticas. Los criterios seguidos para seleccionar estas situaciones fueron: en primer lugar, el hecho de que simularan una situación de toma de decisiones, en la cual los sujetos tenían alguna familiaridad con las situaciones implicadas y algún sentimiento impreciso acerca de las probabilidades implicadas en esas situaciones sin conocerlas realmente; en segundo lugar, estas situaciones eran tales que el experimentador podía calcular las probabilidades verdaderas a partir de los datos. Los resultados calculados se usaron después para comparar los métodos referidos.

Para realizar esta comparación entre los distintos métodos se presentaron a una muestra de individuos las situaciones hipotéticas de decisión y así se tuvieron disponibles las probabilidades reales correspondientes a estas situaciones hipotéticas aplicando cada uno de los métodos. Con estas respuestas muestrales se construyeron tres vectores de medias de las probabilidades. Cada media, como componente de cada uno de estos vectores, se refiere a la media de las probabilidades reales asignadas por el total de individuos para la misma situación. Por tanto, el vector de medias tiene tantas componentes como situaciones hipotéticas se les presentaron a los individuos para que las valoraran y se tiene un vector de medias por cada método de obtención. Luego se compararon estos tres vectores de medias donde cada vector tiene una componente para cada situación de decisión, con el vector correspondiente de las probabilidades verdaderas de dichas situaciones. Para realizar este contraste, es decir, para analizar si las diferencias eran significativas, se usó el 'test' T^2 de Hotelling.

Las muestras de cada método fueron comparadas con las de los otros métodos usando también este 'test' T^2 de Hotelling. Esto significa que lo que se compara en este caso son los conjuntos o vectores de respuestas (probabilidades reales) de la muestra de individuos para cada método. Es decir, en este caso, cada vector tiene tantas componentes como individuos haya, obteniendo una muestra para cada método y repitiendo esto para cada situación de decisión. Cuando usamos este 'test' es importante que las matrices de covarianzas para cada dos muestras sean iguales. Por ello, se usó un 'test' ji-cuadrado para discutir si dichas matrices pueden considerarse iguales, es decir, si las diferencias para todas las comparaciones son cero, y que, por tanto, no se viola el supuesto de homogeneidad de las matrices de covarianzas.

Puesto que el objetivo de este capítulo es la exposición del método del autovalor para la obtención de probabilidades, hemos hecho esta breve referencia al experimento que compara este método con los otros dos mencionados sin ánimo de desarrollarlo de forma explícita. Los detalles de este experimento pueden encontrarse en los trabajos antes mencionados.

Resumiendo las conclusiones del experimento, podemos decir que los métodos 1 y 2 , de la asignación directa de probabilidades a los sucesos, y de la probabilidad "P" respectivamente, producen resultados similares, mientras que el método 3 (del autovalor) produce resultados significativamente diferentes de los otros dos métodos.

Concluyendo, hemos discutido una metodología para extraer probabilidades subjetivas de una decisor, metodología que está basada en las comparaciones por parejas de las probabilidades de un individuo, y hemos discutido brevemente el experimento para comparar tres métodos distintos de extraer probabilidades subjetivas. Al realizar este experimento se tiene el inconveniente de que el método del autovalor es un procedimiento más complicado que los otros y que por tanto necesita una instrución individual para que pueda aplicarse. Esto es difícil de conseguir tratándose de un grupo, sin embargo, esta metodología tiene una ventaja fundamental que es la capacidad para comprobar las posibles inconsistencias en la matriz, y así permitir al decisor la opción de volver a evaluar sus datos. Por tanto, el método del autovalor es ventajoso cuando se solicita la información del decisor sobre una base individual.

5.4.- Aplicación del método del autovalor para fijar probabilidades subjetivas en el mercado de capitales.

Para aplicar la metodología expuesta en el epígrafe 5.2., hemos seleccionado un conjunto de treinta valores de la Bolsa de Comercio de Madrid, con el objeto de obtener las probabilidades de invertir en cada uno de ellos. Los valores se han seleccionado entre aquellos que ponderan para el índice general y que consideramos más significativos dentro del mercado bursátil madrileño.

Presentamos una tabla de datos para cada valor con las cotizaciones y el número de títulos comprados o vendidos a lo largo de doscientas sesiones. En dicha tabla figuran también las fechas en las que se han realizado esas sesiones: desde el veinte de julio de 1984 al dieciseis de mayo de 1985.

Si en la columna correspondiente al número de títulos vendidos o comprados figura un "0" , significa que la sesión se ha cerrado en posición "dinero" o posición "papel" .

Dichos valores, agrupados por sectores son los siguientes:

BANCOS

Bilbao, Central, Banesto, Hispano, Popular, Santander y Vizcaya.

ELECTRICIDAD

FECSA, Hidrola, Iberduero, Sevillana, Unión-Fenosa.

ALIMENTACION

Azucarera

CEMENTOS Y CONSTRUCCION

Asland, Valderribas, Dragados, Vallehermoso, Huarte.

INVERSION MOBILIARIA

General de Inversiones, Popularinsa, Española de Inversiones.

QUIMICAS Y PAPELERAS

Sarrió, Energías, Explosivos Rio Tinto, CEPSA, Petromed.

SIDEROMETALURGICAS

Altos Hornos, Tubacex, Motor Ibérica.

COMUNICACIONES

Telefónica.

A continuación presentamos la tabla de datos correspondiente a cada uno de estos valores.

5.4.1.- Tabla de datos.

Exponemos treinta páginas que recogen las cotizaciones de los treinta valores mencionados a lo largo de doscientas sesiones, así como el número de títulos comprados o vendidos a esas cotizaciones, como ya habíamos indicado.

COTIZACIONES DE VALORES
B. BILBAO

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	342.000	10,465	2-10-84	353.000	10,525	14-12-84	320.000	9,331	28- 2-85	335.000	16,395
23- 7-84	344.000	11,580	3-10-84	358.000	22,688	17-12-84	325.000	15,488	1- 3-85	336.000	14,114
24- 7-84	347.000	7,930	4-10-84	362.000	21,456	18-12-84	325.000	17,031	4- 3-85	337.000	8,241
26- 7-84	347.000	9,307	5-10-84	367.000	30,189	19-12-84	319.000	14,174	5- 3-85	337.000	11,269
27- 7-84	347.000	13,270	8-10-84	368.000	20,129	20-12-84	315.000	18,472	6- 3-85	337.000	8,821
30- 7-84	347.000	12,044	9-10-84	368.000	20,730	21-12-84	314.000	11,887	7- 3-85	328.000	15,999
31- 7-84	353.000	12,528	10-10-84	361.000	8,377	26-12-84	314.000	14,617	8- 3-85	340.000	17,530
1- 8-84	355.000	8,437	11-10-84	360.000	11,820	27-12-84	314.000	24,067	11- 3-85	340.000	13,017
2- 8-84	358.000	3,960	15-10-84	363.000	21,569	28-12-84	317.000	31,894	12- 3-85	340.000	11,023
3- 8-84	358.000	19,314	16-10-84	363.000	9,548	2- 1-85	306.000	14,858	13- 3-85	340.000	12,666
6- 8-84	360.000	13,795	17-10-84	359.000	9,237	3- 1-85	306.000	8,889	14- 3-85	340.000	8,247
7- 8-84	360.000	9,031	18-10-84	351.000	7,779	4- 1-85	310.000	6,523	15- 3-85	340.000	7,145
8- 8-84	360.000	7,827	19-10-84	347.000	5,904	7- 1-85	312.000	15,835	18- 3-85	340.000	14,196
9- 8-84	358.000	4,948	22-10-84	346.000	13,360	8- 1-85	311.000	12,383	20- 3-85	340.000	6,389
10- 8-84	357.000	8,622	23-10-84	345.000	10,045	9- 1-85	311.000	10,641	21- 3-85	340.000	7,815
13- 8-84	354.000	9,469	24-10-84	345.000	7,871	10- 1-85	314.000	7,416	22- 3-85	340.000	3,995
14- 8-84	350.000	8,921	25-10-84	345.000	8,502	11- 1-85	313.000	9,055	25- 3-85	340.000	6,903
16- 8-84	349.000	10,909	26-10-84	344.000	5,668	14- 1-85	313.000	15,558	26- 3-85	340.000	9,474
17- 8-84	348.000	5,962	29-10-84	344.000	9,290	15- 1-85	313.000	11,171	27- 3-85	337.000	10,569
20- 8-84	349.000	5,562	30-10-84	340.000	7,098	16- 1-85	313.000	12,923	28- 3-85	335.000	8,202
21- 8-84	349.000	4,815	31-10-84	338.000	6,387	17- 1-85	315.000	35,694	29- 3-85	334.000	7,400
22- 8-84	349.000	3,464	2-11-84	337.000	4,906	18- 1-85	314.000	12,463	1- 4-85	337.000	9,154
23- 8-84	349.000	4,048	5-11-84	336.000	8,404	21- 1-85	313.000	11,149	2- 4-85	337.000	6,722
24- 8-84	346.000	8,522	6-11-84	335.000	7,389	22- 1-85	313.000	13,418	3- 4-85	337.000	6,172
27- 8-84	344.000	7,744	7-11-84	331.000	8,063	23- 1-85	312.000	12,738	8- 4-85	337.000	6,457
28- 8-84	342.000	11,917	8-11-84	327.000	12,287	24- 1-85	311.000	12,344	9- 4-85	337.000	9,233
29- 8-84	341.000	5,287	12-11-84	325.000	19,843	25- 1-85	311.000	16,225	10- 4-85	336.000	9,637
30- 8-84	341.000	7,175	13-11-84	320.000	16,140	28- 1-85	316.000	14,861	11- 4-85	336.000	16,784
31- 8-84	343.000	3,989	14-11-84	319.000	14,970	29- 1-85	320.000	8,334	12- 4-85	335.000	13,484
3- 9-84	343.000	14,534	15-11-84	319.000	17,846	30- 1-85	323.000	7,917	15- 4-85	335.000	14,111
4- 9-84	347.000	3,821	16-11-84	319.000	13,728	31- 1-85	327.000	6,196	16- 4-85	335.000	13,959
5- 9-84	347.000	4,083	19-11-84	322.000	12,477	1-2-85	330.000	10,219	17- 4-85	338.000	15,181
6- 9-84	345.000	3,527	20-11-84	324.000	10,644	4- 2-85	330.000	9,268	18- 4-85	338.000	8,028
7- 9-84	345.000	6,450	21-11-84	323.000	8,620	5- 2-85	325.000	8,910	19- 4-85	338.000	6,802
10- 9-84	345.000	5,571	22-11-84	320.000	7,156	6- 2-85	322.000	12,974	22- 4-85	338.000	10,766
11- 9-84	345.000	10,986	23-11-84	319.000	8,251	7- 2-85	319.000	10,336	23- 4-85	338.000	11,522
12- 9-84	350.000	17,933	26-11-84	319.000	10,160	8- 2-85	318.000	12,907	24- 4-85	338.000	14,951
13- 9-84	348.000	9,955	27-11-84	318.000	7,120	11- 2-85	318.000	16,402	25- 4-85	338.000	10,857
14- 9-84	345.000	8,663	28-11-84	318.000	8,757	12- 2-85	320.000	9,161	26- 4-85	338.000	10,328
17- 9-84	351.000	31,043	29-11-84	318.000	10,261	13- 2-85	322.000	8,521	29- 4-85	338.000	9,049
18- 9-84	354.000	25,708	30-11-84	317.000	7,183	14- 2-85	321.000	5,357	30- 4-85	338.000	10,730
19- 9-84	354.000	32,011	3-12-84	313.000	15,065	15- 2-85	321.000	7,867	3- 5-85	341.000	9,600
20- 9-84	350.000	7,547	4-12-84	310.000	15,781	18- 2-85	322.000	13,316	6- 5-85	341.000	8,042
21- 9-84	348.000	18,646	5-12-84	309.000	22,569	19- 2-85	324.000	11,706	7- 5-85	341.000	11,095
24- 9-84	347.000	8,977	6-12-84	308.000	21,342	20- 2-85	323.000	8,409	8- 5-85	344.000	6,353
25- 9-84	346.000	10,240	7-12-84	308.000	25,797	21- 2-85	329.000	22,571	9- 5-85	344.000	8,610
26- 9-84	346.000	5,403	10-12-84	308.000	21,299	22- 2-85	332.000	24,393	10- 5-85	344.000	8,148
27- 9-84	346.000	6,506	11-12-84	311.000	18,307	25- 2-85	331.000	14,195	13- 5-85	344.000	8,757
28- 9-84	346.000	6,758	12-12-84	316.000	10,194	26- 2-85	331.000	10,365	14- 5-85	344.000	8,062
1-10-84	351.000	19,031	13-12-84	318.000	14,775	27- 2-85	335.000	87,078	16- 5-85	344.000	8,418

COTIZACIONES DE VALORES
B. CENTRAL

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	339.000	29,140	2-10-84	358.000	25,156	14-12-84	314.000	42,432	28- 2-85	326.000	37,361
23- 7-84	341.000	25,385	3-10-84	361.000	36,443	17-12-84	317.000	30,340	1- 3-85	326.000	39,132
24- 7-84	343.000	21,454	4-10-84	368.000	24,864	18-12-84	321.000	52,519	4- 3-85	320.000	109,953
26- 7-84	345.000	41,499	5-10-84	371.000	36,345	19-12-84	319.000	52,744	5- 3-85	315.000	435,702
27- 7-84	347.000	26,469	8-10-84	375.000	43,564	20-12-84	315.000	44,014	6- 3-85	315.000	95,459
30- 7-84	350.000	40,905	9-10-84	375.000	62,089	21-12-84	312.000	40,058	7- 3-85	315.000	106,749
31- 7-84	355.000	28,508	10-10-84	372.000	43,378	26-12-84	311.000	59,914	8- 3-85	315.000	47,790
1- 8-84	356.000	26,770	11-10-84	369.000	39,469	27-12-84	308.000	47,518	11- 3-85	315.000	84,693
2- 8-84	357.000	31,417	15-10-84	368.000	39,678	28-12-84	305.000	40,727	12- 3-85	313.000	78,073
3- 8-84	360.000	36,745	16-10-84	368.000	28,257	2- 1-85	305.000	45,728	13- 3-85	313.000	78,349
6- 8-84	362.000	32,055	17-10-84	365.000	21,484	3- 1-85	306.000	14,954	14- 3-85	313.000	582,701
7- 8-84	362.000	25,168	18-10-84	362.000	19,614	4- 1-85	309.000	20,654	15- 3-85	313.000	134,252
8- 8-84	362.000	23,829	19-10-84	359.000	25,038	7- 1-85	312.000	37,976	18- 3-85	313.000	75,543
9- 8-84	362.000	27,695	22-10-84	357.000	34,222	8- 1-85	312.000	25,178	20- 3-85	313.000	77,428
10- 8-84	361.000	23,601	23-10-84	355.000	30,593	9- 1-85	310.000	24,122	21- 3-85	313.000	70,099
13- 8-84	359.000	34,529	24-10-84	355.000	35,056	10- 1-85	310.000	35,705	22- 3-85	313.000	63,101
14- 8-84	357.000	24,789	25-10-84	355.000	24,756	11- 1-85	310.000	46,815	25- 3-85	313.000	74,298
16- 8-84	350.000	32,645	26-10-84	353.000	25,361	14- 1-85	310.000	39,524	26- 3-85	313.000	102,574
17- 8-84	352.000	23,192	29-10-84	350.000	30,981	15- 1-85	310.000	32,308	27- 3-85	314.000	37,274
20- 8-84	354.000	24,289	30-10-84	346.000	21,291	16- 1-85	310.000	41,365	28- 3-85	314.000	30,667
21- 8-84	355.000	26,518	31-10-84	344.000	27,189	17- 1-85	310.000	55,097	29- 3-85	314.000	26,589
22- 8-84	355.000	25,869	2-11-84	343.000	17,022	18- 1-85	310.000	32,048	1- 4-85	315.000	50,2[illegible]8
23- 8-84	355.000	25,345	5-11-84	342.000	25,869	21- 1-85	310.000	32,839	2- 4-85	315.000	64,668
24- 8-84	358.000	[illegible]7,145	6-11-84	340.000	25,292	22- 1-85	306.000	40,248	3- 4-85	316.000	57,645
27- 8-84	359.000	32,368	7-11-84	337.000	28,634	23- 1-85	306.000	54,655	8- 4-85	318.000	33,160
28- 8-84	359.000	39,771	8-11-84	334.000	27,729	24- 1-85	306.000	56,560	9- 4-85	318.000	25,433
29- 8-84	360.000	29,212	12-11-84	331.000	38,937	25- 1-85	309.000	20,257	10- 4-85	318.000	44,922
30- 8-84	360.000	24,409	13-11-84	330.000	40,476	28- 1-85	311.000	27,324	11- 4-85	317.000	59,743
31- 8-84	360.000	22,684	14-11-84	327.000	41,726	29- 1-85	315.000	11,376	12- 4-85	316.000	49,487
3- 9-84	359.000	18,730	15-11-84	325.000	53,519	30- 1-85	318.000	19,272	15- 4-85	315.000	52,069
4- 9-84	359.000	22,447	16-11-84	325.000	37,072	31- 1-85	319.000	42,953	16- 4-85	315.000	61,860
5- 9-84	359.000	20,465	19-11-84	328.000	41,223	1- 2-85	320.000	39,093	17- 4-85	317.000	41,529
6- 9-84	360.000	13,922	20-11-84	331.000	33,825	4- 2-85	320.000	60,015	18- 4-85	317.000	43,859
7- 9-84	360.000	16,693	21-11-84	331.000	27,580	5- 2-85	320.000	34,417	19- 4-85	319.000	35,523
10- 9-84	360.000	30,018	22-11-84	331.000	21,866	6- 2-85	320.000	51,133	22- 4-85	319.000	48,975
11- 9-84	358.000	27,050	23-11-84	332.000	22,472	7- 2-85	320.000	31,553	23- 4-85	319.000	31,287
12- 9-84	358.000	23,725	26-11-84	331.000	21,900	8- 2-85	320.000	36,024	24- 4-85	318.000	40,036
13- 9-84	358.000	19,434	27-11-84	330.000	18,785	11- 2-85	320.000	39,402	25- 4-85	318.000	39,112
14- 9-84	358.000	37,590	28-11-84	329.000	19,920	12- 2-85	320.000	40,877	26- 4-85	318.000	37,140
17- 9-84	360.000	37,416	29-11-84	328.000	18,026	13- 2-85	320.000	30,452	29- 4-85	316.000	32,093
18- 9-84	362.000	38,610	30-11-84	327.000	32,902	14- 2-85	323.000	14,023	30- 4-85	320.000	45,332
19- 9-84	362.000	32,401	3-12-84	323.000	50,730	15- 2-85	324.000	23,298	3- 5-85	320.000	25,096
20- 9-84	362.000	25,314	4-12-84	318.000	64,074	18- 2-85	326.000	33,597	6- 5-85	322.000	56,693
21- 9-84	360.000	24,020	5-12-84	313.000	47,095	19- 2-85	328.000	11,657	7- 5-85	324.000	38,298
24- 9-84	359.000	27,924	6-12-84	309.000	62,508	20- 2-85	323.000	23,217	8- 5-85	324.000	46,024
25- 9-84	357.000	23,728	7-12-84	307.000	107,829	21- 2-85	329.000	41,516	9- 5-85	324.000	56,658
26- 9-84	357.000	37,744	10-12-84	307.000	77,236	22- 2-85	331.000	34,109	10- 5-85	324.000	40,272
27- 9-84	357.000	23,512	11-12-84	307.000	68,542	25- 2-85	331.000	47,573	13- 5-85	322.000	68,077
28- 9-84	357.000	33,167	12-12-84	307.000	61,065	26- 2-85	330.000	35,258	14- 5-85	322.000	14,434
1-10-84	358.000	29,164	13-12-84	312.000	37,796	27- 2-85	328.000	41,750	16- 5-85	322.000	41,122

COTIZACIONES DE VALORES
BANESTO

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	351.000	59,441	2-10-84	373.000	71,992	14-12-84	330.000	61,910	28- 2-85	335.000	54,644
23- 7-84	356.000	46,634	3-10-84	378.000	138,116	17-12-84	330.000	100,213	1- 3-85	335.000	62,755
24- 7-84	360.000	24,089	4-10-84	384.000	137,425	18-12-84	336.000	78,627	4- 3-85	341.000	25,373
26- 7-84	360.000	64,278	5-10-84	390.000	92,570	19-12-84	333.000	106,806	5- 3-85	341.000	47,350
27- 7-84	363.000	38,165	8-10-84	395.000	71,934	20-12-84	329.000	85,473	6- 3-85	331.000	46,695
30- 7-84	369.000	50,800	9-10-84	390.000	109,957	21-12-84	326.000	89,032	7- 3-85	331.000	80,692
31- 7-84	375.000	28,666	10-10-84	381.000	74,743	26-12-84	323.000	74,196	8- 3-85	334.000	52,244
1- 8-84	365.000	52,297	11-10-84	376.000	103,611	27-12-84	323.000	117,045	11- 3-85	332.000	70,365
2- 8-84	370.000	35,574	15-10-84	376.000	160,281	28-12-84	323.000	91,880	12- 3-85	329.000	56,584
3- 8-84	370.000	63,001	16-10-84	380.000	96,769	2- 1-85	328.000	137,335	13- 3-85	328.000	57,620
6- 8-84	372.000	27,075	17-10-84	377.000	56,011	3- 1-85	333.000	81,844	14- 3-85	326.000	52,143
7- 8-84	372.000	39,948	18-10-84	371.000	70,508	4- 1-85	338.000	82,615	15- 3-85	[illegible]	60,462
8- 8-84	373.000	44,224	19-10-84	365.000	72,433	7- 1-85	338.000	73,280	18- 3-85	323.000	71,821
9- 8-84	370.000	38,036	22-10-84	360.000	63,740	8- 1-85	336.000	73,650	20- 3-85	[illegible]	58,941
10- 8-84	367.000	34,631	23-10-84	360.000	162,438	9- 1-85	336.000	84,536	21- 3-85	323.000	62,426
13- 8-84	365.000	56,748	24-10-84	360.000	48,300	10- 1-85	336.000	141,255	22 3-85	323.000	60,596
14- 8-84	361.000	66,481	25-10-84	360.000	58,385	11- 1-85	336.000	55,995	25- 3-85	320.000	274,215
16- 8-84	357.000	61,003	26-10-84	360.000	61,581	14- 1-85	339.000	109,860	26- 3-85	321.000	256,804
17- 8-84	360.000	41,739	29-10-84	356.000	61,126	15- 1-85	339.000	60,859	27- 3-85	322.000	214,178
20- 8-84	364.000	33,999	30-10-84	349.000	86,263	16- 1-85	339.000	72,208	28- 3-85	323.000	159,400
21- 8-84	367.000	41,238	31-10-84	349.000	96,606	17- 1-85	339.000	81,733	29- 3-85	324.000	247,966
22- 8-84	367.000	40,576	2-11-84	349.000	58,070	18- 1-85	344.000	70,060	1- 4-85	324.000	246,728
23- 8-84	367.000	41,319	5-11-84	349.000	60,602	21- 1-85	340.000	81,506	2- 4-85	324.000	238,384
24- 8-84	364.000	44,773	6-11-84	349.000	54,196	22- 1-85	339.000	83,513	3- 4-85	324.000	204,748
27- 8-84	364.000	42,790	7-11-84	346.000	58,060	23- 1-85	339.000	91,123	8- 4-85	325.000	152,119
28- 8-84	366.000	40,373	8-11-84	345.000	63,726	24- 1-85	339.000	54,040	9- 4-85	325.000	120,826
29- 8-84	366.000	38,363	12-11-84	345.000	59,678	25- 1-85	339.000	111,471	10- 4-85	325.000	100,182
30- 8-84	370.000	63,148	13-11-84	345.000	47,416	28- 1-85	339.000	116,915	11- 4-85	325.000	71,848
31- 8-84	370.000	39,426	14-11-84	342.000	48,828	29- 1-85	345.000	94,176	12- 4-85	325.000	103,207
3- 9-84	[illegible]	36,604	15-11-84	342.000	56,729	30- 1-85	345.000	64,542	15- 4-85	325.000	178,332
4- 9-84	370.000	58,568	16-11-84	342.000	131,522	31- 1-85	350.000	73,527	16- 4-85	325.000	179,570
5- 9-84	372.000	54,778	19-11-84	347.000	91,247	1- 2-85	350.000	93,846	17- 4-85	325.000	128,008
6- 9-84	372.000	38,648	20-11-84	347.000	47,275	4- 2-85	343.000	65,327	18- 4-85	325.000	162,989
7- 9-84	372.000	30,611	21-11-84	347.000	50,928	5- 2-85	340.000	55,347	19- 4-85	325.000	138,061
10- 9-84	372.000	54,040	22-11-84	346.000	37,429	6- 2-85	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	154,048
11- 9-84	369.000	44,859	23-11-84	346.000	67,120	7- 2-85	332.000	54,337	23- 4-85	325.000	147,908
12- 9-84	369.000	101,637	26-11-84	346.000	60,406	8- 2-85	331.000	45,699	24- 4-85	325.000	106,075
13- 9-84	369.000	31,560	27 11-84	345.000	45,675	11- 2-85	331.000	118,800	25- 4-85	325.000	94,487
14- 9-84	365.000	24,046	28-11-84	345.000	53,694	12- 2-85	331.000	74,706	26- 4-85	326.000	50,060
17- 9-84	365.000	25,856	29-11-84	345.000	50,330	13- 2-85	333.000	64,429	29- 4-85	330.000	48,505
18- 9-84	[illegible]	31,210	30-11-84	343.000	82,681	14- 2-85	338.000	51,314	30- 4-85	[illegible]	64,241
19- 9-84	371.000	32,385	3-12-84	337.000	67,893	15- 2-85	338.000	63,077	3- 5-85	333.000	44,524
20- 9-84	371.000	26,602	4-12-84	330.000	49,048	18- 2-85	338.000	139,567	6- 5-85	333.000	41,417
21- 9-84	371.000	41,825	5-12-84	[illegible]	71,627	19- 2-85	341.000	48,185	7- 5-85	333.000	52,039
24- 9-84	371.000	28,832	6-12-84	323.000	91,247	20- 2-85	341.000	38,489	8- 5-85	333.000	44,371
25- 9-84	371.000	31,455	7-12-84	321.000	116,463	21- 2-85	346.000	175,989	9- 5-85	333.000	37,566
26- 9-84	371.000	29,546	10-12-84	321.000	81,200	22- 2-85	352.000	97,307	10- 5-85	333.000	54,777
27- 9-84	[illegible]	26,302	11-12-84	321.000	104,540	25- 2-85	347.000	83,129	13- 5-85	333.000	73,096
28- 9-84	371.000	42,269	12-12-84	321.000	160,660	26- 2-85	341.000	67,245	14- 5-85	[illegible]	79,889
1-10-84	369.000	35,299	13-12-84	324.000	107,614	27- 2-85	341.000	56,996	16- 5-85	340.000	43,213

COTIZACIONES DE VALORES
B.HISPANO

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	249.000	19,282	2-10-84	248.000	21,305	14-12-84	173.000	255,920	28- 2-85	159.000	15,[illegible]
23- 7-84	249.000	23,023	3-10-84	252.000	49,993	17-12-84	177.000	260,930	1- 3-85	159.000	18,304
24- 7-84	250.000	57,289	4-10-84	257.000	51,880	18-12-84	182.000	191,795	4- 3-85	159.000	32,109
26- 7-84	251.000	26,672	5-10-84	262.000	[illegible]8,149	19-12-84	185.000	138,994	5- 3-85	160.000	14,827
27- 7-84	253.000	36,979	8-10-84	262.000	71,474	20-12-84	181.000	73,572	6- 3-85	161.000	16,000
30- 7-84	257.000	52,653	9-10-84	256.000	44,603	21-12-84	176.000	78,931	7- 3-85	159.000	25,75[illegible]
31- 7-84	262.000	39,722	10-10-84	250.000	31,626	26-12-84	171.000	116,568	8- 3-85	159.000	15,549
1- 8-84	262.000	29,867	11-10-84	245.000	61,288	27-12-84	168.000	117,856	11- 3-85	160.000	27,498
2- 8-84	263.000	20,482	15-10-84	248.000	40,562	28-12-84	165.000	220,120	12- 3-85	161.000	24,365
3- 8-84	264.000	25,803	16-10-84	247.000	22,021	2- 1-85	168.000	80,262	13- 3-85	160.000	19,562
6- 8-84	258.000	16,060	17-10-84	242.000	22,423	3- 1-85	172.000	54,084	14- 3-85	157.000	55,084
7- 8-84	258.000	25,774	18-10-84	237.000	20,366	4- 1-85	176.000	51,378	15- 3-85	158.000	27,085
8- 8-84	255.000	14,596	19-10-84	232.000	26,136	7- 1-85	175.000	75,841	18- 3-85	158.000	20,269
9- 8-84	252.000	15,641	22-10-84	232.000	171,010	8- 1-85	173.000	45,084	20- 3-85	158.000	22,990
10- 8-84	248.000	15,309	23-10-84	238.000	33,215	9- 1-85	170.000	31,160	21- 3-85	158.000	25,799
13- 8-84	242.000	12,637	24-10-84	243.000	18,381	10- 1-85	173.000	28,585	22- 3-85	158.000	25,504
14- 8-84	238.000	17,186	25-10-84	243.000	25,593	11- 1-85	172.000	22,578	25- 3-85	158.000	30,010
16- 8-84	237.000	37,175	26-10-84	243.000	17,576	14- 1-85	170.000	38,993	26- 3-85	158.000	31,301
17- 8-84	240.000	17,955	29-10-84	240.000	28,253	15- 1-85	167.000	27,311	27- 3-85	158.000	14,598
20- 8-84	240.000	10,694	30-10-84	237.000	32,765	16- 1-85	166.000	51,013	28- 3-85	158.000	27,992
21- 8-84	244.000	17,592	31-10-84	232.000	29,105	17- 1-85	164.000	41,183	29- 3-85	158.000	11,233
22- 8-84	244.000	34,916	2-11-84	232.000	15,962	18- 1-85	164.000	36,653	1- 4-85	158.000	22,250
23- 8-84	240.000	12,888	5-11-84	232.000	27,350	21- 1-85	164.000	73,951	2- 4-85	158.000	12,668
24- 8-84	236.000	11,388	6-11-84	230.000	33,397	22- 1-85	161.000	76,574	3- 4-85	158.000	12,594
27- 8-84	230.000	17,602	7-11-84	225.000	21,172	23- 1-85	160.000	63,554	8- 4-85	158.000	22,839
28- 8-84	235.000	35,560	8-11-84	220.000	17,709	24- 1-85	157.000	93,052	9- 4-85	158.000	16,934
29- 8-84	238.000	32,569	12-11-84	220.000	46,046	25- 1-85	158.000	48,572	10- 4-85	158.000	8,604
30- 8-84	238.000	17,849	13-11-84	220.000	21,341	28- 1-85	161.000	55,431	11- 4-85	158.000	18,265
31- 8-84	238.000	8,226	14-11-84	220.000	23,234	29- 1-85	165.000	56,334	12- 4-85	159.000	37,578
3- 9-84	239.000	11,133	15-11-84	220.000	[illegible]	30- 1-85	170.000	59,124	15- 4-85	161.000	35,834
4- 9-84	238.000	17,063	16-11-84	220.000	113,481	31- 1-85	175.000	93,469	16- 4-85	163.000	23,108
5- 9-84	238.000	22,069	19-11-84	225.000	53,880	1- [illegible]5	177.000	54,919	17- 4-85	163.000	37,687
6- 9-84	[illegible]	12,771	20-11-84	230.000	34,690	4- 2-85	175.000	60,536	18- 4-85	165.000	48,[illegible]
7- 9-84	244.000	14,333	21-11-84	225.000	34,895	5- [illegible]5	172.000	38,957	19- 4-85	164.000	22,147
10- 9-84	246.000	39,198	22-11-84	222.000	37,001	6- 2-85	169.000	38,096	22- 4-85	164.000	27,115
11- 9-84	248.000	37,641	23-11-84	222.000	31,174	7- 2-85	165.000	[illegible]8,492	23- 4-85	164.000	29,585
12- 9-84	249.000	33,852	26-11-84	222.000	3[illegible],401	8- 2-85	162.000	29,902	24- 4-85	164.000	18,072
13- 9-84	248.000	23,227	27-11-84	220.000	44,654	11- [illegible]	161.000	56,432	25- 4-85	164.000	21,896
14- 9-84	242.000	16,359	28-11-84	220.000	42,951	12- 2-85	165.000	30,5[illegible]	26- 4-85	164.000	17,969
17- 9-84	242.000	104,885	29-11-84	219.000	50,572	13 2-85	167.000	31,765	29- 4-85	164.000	24,054
18- 9-84	246.000	43,557	30-11-84	218.000	71,256	14- 2-85	164.000	25,535	30- 4-85	164.000	17,384
19- 9-84	250.000	33,199	3-12-84	212.000	87,046	15- 2-85	161.000	33,435	3- 5-85	164.000	19,064
20- 9-84	249.000	48,426	4-12-84	207.000	61,495	18- 2-85	164.000	26,830	6- 5-85	164.000	17,975
21- 9-84	246.000	37,947	5-12-84	202.000	59,068	19- 2-85	165.000	26,582	7- 5-85	164.000	13,656
24- 9-84	243.000	18,971	6-12-84	190.000	0	20- 2-85	164.000	17,854	8- 5-85	164.000	16,418
25- 9-84	245.000	33,577	7-12-84	170.000	136,484	21- 2-85	165.000	31,680	9- 5-85	164.000	22,110
26- 9-84	246.000	23,563	10-12-84	157.000	128,214	22- 2-85	165.000	21,[illegible]5	10- 5-85	164.000	17,222
27- 9-84	246.000	19,173	11-12-84	160.000	212,063	25- 2-85	163.000	22,570	13- 5-85	164.000	20,716
28- 9-84	244.000	24,042	12-12-84	163.000	143,220	26- 2-85	161.000	20,068	14- 5-85	163.000	25,130
1-10-84	244.000	27,682	13-12-84	168.000	190,636	27- 2-85	160.000	31,[illegible]	16- 5-85	163.000	27,[illegible]48

COTIZACIONES DE VALORES
B.POPULAR

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	317.000	10,905	2-10-84	403.000	67,743	14-12-84	362.000	30,331	28- 2-85	373.000	18,688
23- 7-84	320.000	12,511	3-10-84	413.000	44,552	17-12-84	370.000	36,462	1- 3-85	375.000	9,163
24- 7-84	324.000	13,980	4-10-84	421.000	56,126	18-12-84	375.000	62,782	4- 3-85	375.000	9,245
26- 7-84	331.000	20,424	5-10-84	421.000	64,640	19-12-84	372.000	39,665	5- 3-85	375.000	10,766
27- 7-84	339.000	40,532	8-10-84	421.000	45,262	20-12-84	363.000	23,875	6- 3-85	378.000	12,340
30- 7-84	346.000	34,152	9-10-84	420.000	40,161	21-12-84	354.000	16,956	7- 3-85	376.000	42,133
31- 7-84	352.000	53,312	10-10-84	408.000	25,547	26-12-84	352.000	24,999	8- 3-85	376.000	21,531
1- 8-84	332.000	28,212	11-10-84	399.000	55,658	27-12-84	348.000	31,496	11- 3-85	371.000	12,033
2- 8-84	339.000	16,881	15-10-84	405.000	50,971	28-12-84	349.000	66,969	12- 3-85	376.000	10,468
3- 8-84	347.000	26,887	16-10-84	411.000	34,356	2- 1-85	358.000	24,656	13- 3-85	382.000	23,894
6- 8-84	344.000	18,352	17-10-84	404.000	25,564	3- 1-85	365.000	0	14- 3-85	387.000	28,465
7- 8-84	344.000	16,390	18-10-84	397.000	18,413	4- 1-85	380.000	54,309	15- 3-85	388.000	22,897
8- 8-84	337.000	18,187	19-10-84	392.000	58,784	7- 1-85	380.000	53,708	18- 3-85	380.000	9,870
9- 8-84	337.000	14,327	22-10-84	388.000	36,625	8- 1-85	374.000	35,624	20- 3-85	380.000	9,647
10- 8-84	334.000	16,819	23-10-84	394.000	35,687	9- 1-85	381.000	58,342	21- 3-85	386.000	4,118
13- 8-84	325.000	15,790	24-10-84	397.000	25,085	10- 1-85	390.000	43,052	22- 3-85	378.000	10,930
14- 8-84	319.000	13,524	25-10-84	401.000	57,566	11- 1-85	389.000	38,460	25- 3-85	381.000	10,610
16- 8-84	320.000	16,687	26-10-84	398.000	16,313	14- 1-85	388.000	21,968	26- 3-85	382.000	11,500
17- 8-84	325.000	24,055	29-10-84	392.000	19,678	15- 1-85	382.000	30,083	27- 3-85	374.000	26,448
20- 8-84	329.000	12,012	30-10-84	385.000	18,714	16- 1-85	386.000	16,810	28- 3-85	368.000	19,147
21- 8-84	328.000	13,628	31-10-84	385.000	21,203	17- 1-85	390.000	37,231	29- 3-85	372.000	9,170
22- 8-84	325.000	5,729	2-11-84	391.000	20,728	18- 1-85	388.000	8,339	1- 4-85	380.000	13,143
23- 8-84	322.000	11,311	5-11-84	394.000	14,529	21- 1-85	382.000	14,181	2- 4-85	377.000	7,667
24- 8-84	319.000	11,396	6-11-84	389.000	29,482	22- 1-85	376.000	12,905	3- 4-85	377.000	4,562
27- 8-84	323.000	17,063	7-11-84	380.000	17,599	23- 1-85	372.000	29,156	8- 4-85	372.000	6,334
28- 8-84	325.000	12,079	8-11-84	380.000	16,026	24- 1-85	375.000	13,627	9- 4-85	372.000	7,665
29- 8-84	327.000	11,246	12-11-84	379.000	16,607	25- 1-85	379.000	21,879	10- 4-85	370.000	7,244
30- 8-84	329.000	11,190	13-11-84	374.000	11,753	28- 1-85	383.000	14,911	11- 4-85	368.000	12,359
31- 8-84	327.000	9,121	14-11-84	365.000	33,179	29- 1-85	389.000	14,502	12- 4-85	365.000	20,553
3- 9-84	327.000	11,997	15-11-84	368.000	28,209	30- 1-85	399.000	43,942	15- 4-85	365.000	8,574
4- 9-84	329.000	19,821	16-11-84	378.000	47,890	31- 1-85	399.000	29,656	16- 4-85	365.000	7,275
5- 9-84	338.000	22,105	19-11-84	384.000	51,592	1- 2-85	395.000	20,057	17- 4-85	371.000	10,014
6- 9-84	340.000	8,706	20-11-84	390.000	58,663	4- 2-85	395.000	66,176	18- 4-85	370.000	6,149
7- 9-84	341.000	11,804	21-11-84	385.000	22,409	5- 2-85	386.000	20,070	19- 4-85	360.000	16,113
10- 9-84	342.000	21,305	22-11-84	382.000	22,336	6- 2-85	374.000	24,960	22- 4-85	364.000	4,969
11- 9-84	347.000	35,084	23-11-84	388.000	19,040	7- 2-85	364.000	22,503	23- 4-85	361.000	17,218
12- 9-84	352.000	40,398	26-11-84	391.000	21,447	8- 2-85	360.000	53,516	24- 4-85	361.000	10,952
13- 9-84	355.000	36,536	27-11-84	388.000	10,536	11- 2-85	369.000	46,262	25- 4-85	359.000	9,748
14- 9-84	355.000	33,303	28-11-84	382.000	14,269	12- 2-85	376.000	36,019	26- 4-85	353.000	14,754
17- 9-84	350.000	25,678	29-11-84	382.000	11,556	13- 2-85	369.000	32,542	29- 4-85	353.000	15,418
18- 9-84	350.000	16,938	30-11-84	379.000	5,598	14- 2-85	365.000	34,545	30- 4-85	356.000	6,775
19- 9-84	354.000	20,909	3-12-84	369.000	18,574	15- 2-85	374.000	25,185	3- 5-85	360.000	10,631
20- 9-84	356.000	18,251	4-12-84	360.000	55,223	18- 2-85	379.000	24,849	6- 5-85	361.000	8,011
21- 9-84	359.000	38,618	5-12-84	360.000	18,121	19- 2-85	376.000	15,795	7- 5-85	361.000	5,274
24- 9-84	365.000	29,344	6-12-84	351.000	21,295	20- 2-85	370.000	31,822	8- 5-85	354.000	4,898
25- 9-84	372.000	39,911	7-12-84	350.000	52,436	21- 2-85	382.000	47,224	9- 5-85	364.000	9,503
26- 9-84	380.000	65,924	10-12-84	344.000	20,694	22- 2-85	388.000	70,731	10- 5-85	364.000	7,413
27- 9-84	380.000	36,333	11-12-84	340.000	51,325	25- 2-85	385.000	31,556	13- 5-85	365.000	26,187
28- 9-84	367.000	62,804	12-12-84	346.000	37,459	26- 2-85	377.000	36,359	14- 5-85	365.000	20,265
1-10-84	375.000	38,979	13-12-84	353.000	30,623	27- 2-85	379.000	8,683	16- 5-85	365.000	21,361

COTIZACIONES DE VALORES
SANTAND.400

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	331.000	19,465	2-10-84	325.000	48,110	14-12-84	328.000	46,640	28- 2-85	345.000	44,579
23- 7-84	333.000	39,912	3-10-84	328.000	87,861	17-12-84	332.000	44,994	1- 3-85	345.000	51,584
24- 7-84	335.000	21,995	4-10-84	331.000	242,784	18-12-84	332.000	29,583	4- 3-85	345.000	54,257
26- 7-84	336.000	32,482	5-10-84	334.000	220,626	19-12-84	330.000	56,408	5- 3-85	345.000	48,170
27- 7-84	339.000	38,847	8-10-84	336.000	213,678	20-12-84	327.000	67,924	6- 3-85	335.000	36,244
30- 7-84	341.000	37,125	9-10-84	338.000	249,736	21-12-84	325.000	52,044	7- 3-85	343.000	37,724
31- 7-84	344.000	27,240	10-10-84	337.000	98,449	26-12-84	323.000	49,928	8- 3-85	346.000	29,869
1- 8-84	344.000	26,196	11-10-84	333.000	47,513	27-12-84	323.000	97,086	11- 3-85	348.000	34,835
2- 8-84	346.000	18,923	15-10-84	336.000	108,638	28-12-84	324.000	83,831	12- 3-85	349.000	32,918
3- 8-84	347.000	31,787	16-10-84	340.000	82,669	2- 1-85	327.000	59,085	13- 3-85	350.000	82,524
6- 8-84	348.000	31,362	17-10-84	342.000	125,503	3- 1-85	329.000	43,093	14- 3-85	350.000	33,207
7- 8-84	346.000	35,507	18-10-84	336.000	42,690	4- 1-85	333.000	43,957	15- 3-85	350.000	28,063
8- 8-84	347.000	29,702	19-10-84	332.000	44,837	7- 1-85	333.000	47,983	18- 3-85	350.000	33,949
9- 8-84	345.000	32,003	22-10-84	328.000	58,035	8- 1-85	333.000	61,814	20- 3-85	351.000	32,571
10- 8-84	343.000	30,773	23-10-84	326.000	62,489	9- 1-85	333.000	50,085	21- 3-85	352.000	43,088
13- 8-84	338.000	37,851	24-10-84	327.000	60,834	10- 1-85	333.000	45,950	22- 3-85	353.000	33,105
14- 8-84	334.000	31,653	25-10-84	327.000	55,111	11- 1-85	333.000	51,337	25- 3-85	353.000	30,163
16- 8-84	332.000	57,654	26-10-84	327.000	52,298	14- 1-85	333.000	64,400	26- 3-85	355.000	45,022
17- 8-84	331.000	29,942	29-10-84	326.000	63,784	15- 1-85	333.000	45,492	27- 3-85	355.000	33,036
20- 8-84	331.000	29,133	30-10-84	325.000	81,270	16- 1-85	332.000	43,174	28- 3-85	355.000	33,410
21- 8-84	331.000	25,491	31-10-84	326.000	117,166	17- 1-85	332.000	51,412	29- 3-85	355.000	23,217
22- 8-84	331.000	21,014	2-11-84	329.000	79,467	18- 1-85	333.000	39,455	1- 4-85	351.000	26,958
23- 8-84	329.000	23,000	5-11-84	330.000	48,855	21- 1-85	333.000	50,285	2- 4-85	351.000	29,399
24- 8-84	327.000	25,521	6-11-84	330.000	44,238	22- 1-85	332.000	39,684	3- 4-85	352.000	21,237
27- 8-84	325.000	27,588	7-11-84	328.000	51,514	23- 1-85	332.000	47,186	8- 4-85	350.000	30,702
28- 8-84	325.000	34,560	8-11-84	326.000	48,334	24- 1-85	332.000	36,353	9- 4-85	349.000	30,738
29- 8-84	325.000	26,643	12-11-84	326.000	59,033	25- 1-85	332.000	40,414	10- 4-85	346.000	31,693
30- 8-84	325.000	30,051	13-11-84	325.000	52,332	28- 1-85	334.000	50,942	11- 4-85	344.000	27,131
31- 8-84	325.000	20,352	14-11-84	324.000	54,816	29- 1-85	338.000	37,770	12- 4-85	342.000	37,663
3- 9-84	325.000	24,390	15-11-84	323.000	45,794	30- 1-85	341.000	44,302	15- 4-85	342.000	37,043
4- 9-84	325.000	19,511	16-11-84	325.000	43,509	31- 1-85	344.000	37,689	16- 4-85	344.000	26,784
5- 9-84	325.000	20,160	19-11-84	330.000	53,161	1- 2-85	339.000	42,924	17- 4-85	345.000	19,212
6- 9-84	[illegible]	21,403	20-11-84	330.000	53,881	4- 2-85	338.000	57,078	18- 4-85	348.000	31,474
7- 9-84	322.000	[illegible]	21-11-84	330.000	25,298	5- 2-85	334.000	66,665	19- 4-85	349.000	18,560
10- 9-84	323.000	22,719	22-11-84	330.000	28,867	6- 2-85	332.000	50,304	22- 4-85	350.000	25,319
11- 9-84	324.000	35,141	23-11-84	331.000	51,005	7- 2-85	331.000	47,485	23- 4-85	350.000	25,055
12- 9-84	324.000	46,614	26-11-84	332.000	34,252	8- 2-85	330.000	48,620	24- 4-85	350.000	29,209
13- 9-84	325.000	43,117	27-11-84	332.000	46,368	11- 2-85	330.000	55,761	25- 4-85	350.000	49,998
14- 9-84	326.000	30,782	28-11-84	332.000	39,051	12- 2-85	330.000	32,197	26- 4-85	350.000	33,360
17- 9-84	324.000	42,198	29-11-84	331.000	29,551	13- 2-85	330.000	50,249	29- 4-85	352.000	40,665
18- 9-84	323.000	29,496	30-11-84	331.000	47,757	14- 2-85	331.000	105,443	30- 4-85	353.000	29,324
19- 9-84	322.000	29,644	3-12-84	328.000	48,817	15- 2-85	336.000	76,834	3- 5-85	356.000	24,814
20- 9-84	323.000	25,194	4-12-84	325.000	101,432	18- 2-85	341.000	100,772	6- 5-85	358.000	29,387
21- 9-84	323.000	28,912	5-12-84	324.000	83,717	19- 2-85	341.000	53,816	7- 5-85	359.000	27,950
24- 9-84	323.000	33,383	6-12-84	321.000	88,852	20- 2-85	341.000	51,365	8- 5-85	359.000	48,631
25- 9-84	321.000	32,414	7-12-84	319.000	118,037	21- 2-85	344.000	74,827	9- 5-85	360.000	22,033
26- 9-84	322.000	39,303	10-12-84	318.000	70,913	22- 2-85	348.000	61,836	10- 5-85	360.000	36,979
27- 9-84	323.000	34,430	11-12-84	319.000	124,039	25- 2-85	347.000	44,239	13- 5-85	361.000	34,910
28- 9-84	323.000	24,924	12-12-84	322.000	52,727	26- 2-85	346.000	54,216	14- 5-85	361.000	27,662
1-10-84	324.000	40,195	13-12-84	325.000	55,446	27- 2-85	345.000	53,190	16- 5-85	362.000	31,437

COTIZACIONES DE VALORES
B.VIZCAYA

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	389.000	5,240	2-10-84	444.000	23,931	14-12-84	421.000	10,442	28- 2-85	426.000	28,228
23- 7-84	391.000	3,446	3-10-84	453.000	32,214	17-12-84	425.000	18,810	1- 3-85	428.000	16,551
24- 7-84	393.000	5,612	4-10-84	463.000	40,234	18-12-84	427.000	19,505	4- 3-85	428.000	16,200
26- 7-84	396.000	15,356	5-10-84	466.000	33,228	19-12-84	423.000	14,801	5- 3-85	428.000	20,373
27- 7-84	400.000	17,190	8-10-84	466.000	27,907	20-12-84	417.000	12,776	6- 3-85	430.000	31,715
30- 7-84	406.000	21,208	9-10-84	458.000	22,078	21-12-84	412.000	5,109	7- 3-85	430.000	19,425
31- 7-84	412.000	25,800	10-10-84	450.000	26,770	26-12-84	408.000	16,300	8- 3-85	427.000	5,074
1- 8-84	414.000	16,748	11-10-84	446.000	25,321	27-12-84	405.000	16,069	11- 3-85	427.000	19,379
2- 8-84	419.000	37,480	15-10-84	453.000	25,315	28-12-84	406.000	23,411	12- 3-85	428.000	13,298
3- 8-84	425.000	14,424	16-10-84	457.000	24,041	2- 1-85	409.000	27,027	13- 3-85	430.000	49,639
6- 8-84	413.000	17,145	17-10-84	452.000	23,315	3- 1-85	415.000	14,660	14- 3-85	430.000	24,672
7- 8-84	413.000	18,339	18-10-84	445.000	14,091	4- 1-85	423.000	21,390	15- 3-85	432.000	12,062
8- 8-84	409.000	7,871	19-10-84	440.000	40,275	7- 1-85	420.000	21,884	18- 3-85	431.000	7,556
9- 8-84	410.000	10,439	22-10-84	434.000	24,843	8- 1-85	416.000	12,750	20- 3-85	429.000	7,601
10- 8-84	404.000	8,553	23-10-84	440.000	31,454	9- 1-85	415.000	16,135	21- 3-85	428.000	8,850
13- 8-84	398.000	12,854	24-10-84	441.000	26,580	10- 1-85	419.000	13,162	22- 3-85	428.000	9,393
14- 8-84	397.000	14,769	25-10-84	443.000	25,175	11- 1-85	419.000	23,314	25- 3-85	424.000	13,780
16- 8-84	395.000	9,248	26-10-84	440.000	7,819	14- 1-85	419.000	16,463	26- 3-85	420.000	16,665
17- 8-84	398.000	8,162	29-10-84	436.000	16,544	15- 1-85	419.000	15,998	27- 3-85	416.000	23,815
20- 8-84	398.000	9,442	30-10-84	428.000	15,421	16- 1-85	419.000	8,239	28- 3-85	416.000	17,891
21- 8-84	398.000	4,950	31-10-84	424.000	19,794	17- 1-85	421.000	18,215	29- 3-85	418.000	2,893
22- 8-84	395.000	5,289	2-11-84	427.000	17,766	18- 1-85	421.000	9,041	1- 4-85	421.000	4,920
23- 8-84	394.000	4,880	5-11-84	427.000	10,857	21- 1-85	417.000	17,571	2- 4-85	430.000	19,709
24- 8-84	394.000	7,728	6-11-84	423.000	15,232	22- 1-85	417.000	12,968	3- 4-85	424.000	2,122
27- 8-84	391.000	8,094	7-11-84	419.000	13,995	23- 1-85	417.000	11,454	8- 4-85	424.000	5,643
28- 8-84	390.000	13,271	8-11-84	415.000	26,038	24- 1-85	417.000	8,476	9- 4-85	424.000	4,272
29- 8-84	393.000	5,995	12-11-84	415.000	10,119	25- 1-85	418.000	13,261	10- 4-85	424.000	4,120
30- 8-84	394.000	6,599	13-11-84	415.000	9,663	28- 1-85	424.000	22,612	11- 4-85	420.000	4,455
31- 8-84	395.000	4,481	14-11-84	410.000	25,688	29- 1-85	432.000	34,087	12- 4-85	412.000	11,169
3- 9-84	395.000	6,862	15-11-84	406.000	20,149	30- 1-85	438.000	38,198	15- 4-85	405.000	5,949
4- 9-84	397.000	9,194	16-11-84	413.000	78,292	31- 1-85	442.000	20,625	16- 4-85	410.000	5,342
5- 9-84	402.000	18,161	19-11-84	419.000	16,651	1- 2-85	428.000	30,541	17- 4-85	410.000	4,506
6- 9-84	405.000	10,109	20-11-84	423.000	11,005	4- 2-85	424.000	65,403	18- 4-85	410.000	7,872
7- 9-84	405.000	11,048	21-11-84	420.000	21,028	5- 2-85	416.000	23,523	19- 4-85	410.000	61,198
10- 9-84	407.000	12,498	22-11-84	420.000	8,297	6- 2-85	406.000	28,697	22- 4-85	410.000	13,176
11- 9-84	410.000	21,847	23-11-84	423.000	1,976	7- 2-85	399.000	32,115	23- 4-85	410.000	6,266
12- 9-84	416.000	26,166	26-11-84	423.000	8,481	8- 2-85	403.000	74,483	24- 4-85	410.000	4,287
13- 9-84	416.000	25,226	27-11-84	423.000	8,836	11- 2-85	409.000	31,416	25- 4-85	410.000	10,579
14- 9-84	412.000	11,270	28-11-84	421.000	7,349	12- 2-85	415.000	25,734	26- 4-85	410.000	6,237
17- 9-84	410.000	4,475	29-11-84	419.000	8,674	13- 2-85	411.000	25,920	29- 4-85	410.000	5,950
18- 9-84	409.000	10,392	30-11-84	419.000	19,441	14- 2-85	413.000	22,675	30- 4-85	410.000	4,892
19- 9-84	415.000	17,079	3-12-84	415.000	27,787	15- 2-85	417.000	21,024	3- 5-85	414.000	19,445
20- 9-84	415.000	12,546	4-12-84	412.000	28,051	18- 2-85	421.000	32,969	6- 5-85	414.000	2,972
21- 9-84	419.000	29,638	5-12-84	409.000	13,167	19- 2-85	421.000	17,373	7- 5-85	415.000	6,320
24- 9-84	423.000	25,570	6-12-84	405.000	19,778	20- 2-85	423.000	24,108	8- 5-85	417.000	10,721
25- 9-84	428.000	29,286	7-12-84	404.000	32,873	21- 2-85	432.000	47,237	9- 5-85	420.000	17,880
26- 9-84	428.000	27,685	10-12-84	407.000	11,322	22- 2-85	438.000	56,305	10- 5-85	420.000	9,180
27- 9-84	428.000	24,048	11-12-84	409.000	9,379	25- 2-85	434.000	27,326	13- 5-85	424.000	25,928
28- 9-84	432.000	14,938	12-12-84	411.000	22,038	26- 2-85	430.000	21,860	14- 5-85	425.000	42,715
1-10-84	437.000	13,122	13-12-84	417.000	15,594	27- 2-85	426.000	15,239	16- 5-85	428.000	44,171

COTIZACIONES DE VALORES
FECSA POS.A

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	47.250	40,906	2-10-84	62.120	364,526	14-12-84	68.500	176,692	28- 2-85	70.500	102,451
23- 7-84	47.500	36,688	3-10-84	64.120	347,573	17-12-84	67.750	162,946	1- 3-85	71.870	162,225
24- 7-84	48.000	42,459	4-10-84	64.500	375,621	18-12-84	67.870	144,387	4- 3-85	72.370	157,142
26- 7-84	48.370	46,443	5-10-84	67.500	655,412	19-12-84	67.000	61,034	5- 3-85	71.370	207,532
27- 7-84	49.000	107,910	8-10-84	69.750	449,066	20-12-84	66.120	100,831	6- 3-85	70.870	175,600
30- 7-84	51.500	79,741	9-10-84	69.500	300,085	21-12-84	65.750	44,110	7- 3-85	68.750	205,203
31- 7-84	54.250	86,236	10-10-84	67.120	254,904	26-12-84	66.620	210,154	8- 3-85	68.750	200,156
1- 8-84	53.870	129,959	11-10-84	65.620	348,464	27-12-84	66.750	98,924	11- 3-85	70.870	162,270
2- 8-84	54.500	101,581	15-10-84	68.250	246,358	28-12-84	67.000	92,657	12- 3-85	70.370	67,297
3- 8-84	57.250	175,334	16-10-84	68.250	364,879	2- 1-85	65.500	182,367	13- 3-85	69.370	107,495
6- 8-84	60.500	94,706	17-10-84	65.620	118,457	3- 1-85	65.000	152,577	14- 3-85	69.870	91,441
7- 8-84	58.000	153,627	18-10-84	65.750	93,641	4- 1-85	66.120	444,266	15- 3-85	71.250	270,949
8- 8-84	58.750	68,045	19-10-84	64.500	270,075	7- 1-85	66.620	220,499	18- 3-85	72.000	106,644
9- 8-84	57.000	70,341	22-10-84	63.000	262,033	8- 1-85	65.500	324,988	20- 3-85	72.500	98,803
10- 8-84	55.500	91,717	23-10-84	64.620	128,393	9- 1-85	65.000	161,232	21- 3-85	72.250	137,365
13- 8-84	54.000	44,333	24-10-84	65.620	94,927	10- 1-85	66.000	579,804	22- 3-85	71.750	135,058
14- 8-84	52.250	103,074	25-10-84	63.370	179,935	11- 1-85	66.250	483,387	25- 3-85	71.620	133,058
16- 8-84	55.000	57,581	26-10-84	63.250	76,943	14- 1-85	66.870	439,762	26- 3-85	72.750	148,298
17- 8-84	56.000	73,465	29-10-84	63.750	89,365	15- 1-85	69.370	431,079	27- 3-85	71.500	182,851
20- 8-84	57.370	53,559	30-10-84	62.250	125,462	16- 1-85	69.120	251,458	28- 3-85	71.250	119,183
21- 8-84	59.000	136,258	31-10-84	62.250	136,302	17- 1-85	69.250	275,573	29- 3-85	71.870	164,660
22- 8-84	58.750	70,010	2-11-84	64.250	58,733	18- 1-85	69.500	262,684	1- 4-85	73.000	102,163
23- 8-84	58.7[illegible]	[illegible]	5-11-84	64.500	50,984	21- 1-85	69.250	287,036	2- 4-85	72.370	31,616
24- 8-84	58.500	58,057	6-11-84	64.000	46,623	22- 1-85	67.620	245,344	3- 4-85	72.750	66,347
27- 8-84	57.250	29,551	7-11-84	62.500	43,560	23- 1-85	68.000	258,967	8- 4-85	73.000	37,416
28- 8-84	57.500	53,347	8-11-84	61.250	49,863	24- 1-85	69.750	167,805	9- 4-85	72.620	46,535
29- 8-84	58.000	34,202	12-11-84	63.870	139,575	25- 1-85	70.750	221,984	10- 4-85	71.500	95,854
30- 8-84	58.500	39,938	13-11-84	62.620	72,778	28- 1-85	73.250	477,647	11- 4-85	70.370	80,223
31- 8-84	58.250	53,739	14-11-84	63.250	91,496	29- 1-85	74.750	480,151	12- 4-85	69.870	99,210
3- 9-84	58.500	45,004	15-11-84	64.500	226,369	30- 1-85	72.870	271,420	15- 4-85	69.000	70,642
4- 9-84	60.250	186,228	16-11-84	66.000	185,032	31- 1-85	74.500	368,962	16- 4-85	71.250	111,112
5- 9-84	62.500	236,521	19-11-84	66.750	122,809	1- 2-85	75.620	726,681	17- 4-85	72.120	113,427
6- 9-84	61.250	95,401	20-11-84	68.750	266,936	4- 2-85	79.750	813,450	18- 4-85	70.750	36,554
7- 9-84	61.250	99,658	21-11-84	70.000	433,798	5- 2-85	76.500	746,042	19- 4-85	71.120	168,236
10- 9-84	62.500	147,630	22-11-84	69.500	107,328	6- 2-85	78.370	483,882	22- 4-85	72.000	80,820
11- 9-84	62.870	96,769	23-11-84	70.370	165,955	7- 2-85	74.750	375,924	23- 4-85	71.750	33,409
12- 9-84	62.500	68,644	26-11-84	70.000	197,531	8- 2-85	74.500	502,826	24- 4-85	70.500	98,454
13- 9-84	62.500	43,203	27-11-84	67.870	108,750	11- 2-85	76.870	353,798	25- 4-85	69.620	88,640
14- 9-84	61.500	76,386	28-11-84	69.500	119,976	12- 2-85	77.620	213,873	26- 4-85	69.250	208,562
17- 9-84	63.120	169,800	29-11-84	68.750	163,571	13- 2-85	78.000	404,261	29- 4-85	69.370	53,767
18- 9-84	62.250	143,340	30-11-84	68.870	170,526	14- 2-85	79.250	295,190	30- 4-85	71.250	68,373
19- 9-84	62.000	73,892	3-12-84	69.120	215,916	15- 2-85	79.620	315,730	3- 5-85	71.620	77,438
20- 9-84	61.750	55,176	4-12-84	68.500	106,231	18- 2-85	78.250	137,723	6- 5-85	71.000	75,426
21- 9-84	61.120	72,779	5-12-84	68.250	127,671	19- 2-85	76.370	326,937	7- 5-85	70.750	60,242
24- 9-84	61.250	89,552	6-12-84	67.750	137,267	20- 2-85	77.000	164,518	8- 5-85	71.500	61,106
25- 9-84	60.250	59,312	7-12-84	67.250	222,953	21- 2-85	74.870	313,857	9- 5-85	72.870	222,921
26- 9-84	60.000	308,031	10-12-84	69.120	124,955	22- 2-85	73.750	373,239	10- 5-85	72.750	101,140
27- 9-84	61.500	362,480	11-12-84	68.870	95,601	25- 2-85	71.250	340,919	13- 5-85	73.500	71,663
28- 9-84	61.500	170,829	12-12-84	68.750	63,434	26- 2-85	70.750	184,305	14- 5-85	74.620	145,555
1-10-84	63.000	188,142	13-12-84	68.750	89,499	27- 2-85	73.000	247,886	16- 5-85	73.000	64,877

COTIZACIONES DE VALORES
HIDROLA

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	55.750	73,750	2-10-84	80.870	410,714	14-12-84	75.000	148,705	28- 2-85	84.620	275,602
23- 7-84	54.250	151,[illegible]99	3-10-84	80.250	214,327	17-12-84	77.500	295,892	1- 3-85	85.120	129,165
24- 7-84	54.870	100,849	4-10-84	79.750	243,296	18-12-84	79.250	790,538	4- 3-85	85.250	241,281
26- 7-84	56.500	137,485	5-10-84	79.120	379,[illegible]73	19-12-84	78.000	232,248	5- 3-85	84.870	133,550
27- 7-84	57.250	90,624	8-10-84	79.870	341,683	20-12-84	76.500	398,746	6- 3-85	84.500	96,549
30- 7-84	58.120	185,574	9-10-84	79.500	356,081	21-12-84	77.500	241,694	7- 3-85	82.370	168,473
31- 7-84	61.000	222,381	10-10-84	77.750	351,650	26-12-84	78.870	501,216	8- 3-85	80.500	363,495
1- [illegible]	63.000	227,205	11-10-84	76.370	329,447	27-12-84	79.120	725,843	11- 3-85	83.870	287,977
2- 8-84	62.870	174,515	15-10-84	79.000	270,163	28-12-84	79.250	295,083	12- 3-85	84.870	204,792
3- 8-84	66.000	318,894	16-10-84	78.620	218,815	2- 1-85	79.000	311,956	13- 3-85	82.500	85,168
6- 8-84	68.500	305,702	17-10-84	77.000	131,999	3- 1-85	80.000	191,707	14- 3-85	81.750	300,068
7- 8-84	69.000	217,368	18-10-84	75.500	190,969	4- 1-85	82.500	215,829	15- 3-85	83.750	158,612
8- 8-84	67.500	141,956	19-10-84	74.620	263,209	7- 1-85	83.250	301,433	18- 3-85	86.250	273,549
9- 8-84	67.500	163,296	22-10-84	73.250	575,728	8- 1-85	82.750	376,513	20- 3-85	86.250	214,013
10- 8-84	66.750	234,522	23-10-84	74.500	365,333	9- 1-85	83.000	209,702	21- 3-85	85.750	134,234
13- 8-84	65.250	202,822	24-10-84	76.750	389,272	10- 1-85	84.750	238,298	22- 3-85	85.250	208,828
14- 8-84	63.870	190,822	25-10-84	76.000	433,941	11- 1-85	85.750	659,794	25- 3-85	84.870	226,890
16- 8-84	66.870	254,488	26-10-84	75.620	33[illegible],[illegible]94	14- 1-85	84.750	390,120	26- 3-85	86.370	202,7[illegible]1
17- 8-84	66.750	142,692	29-10-84	74.250	235,659	15- 1-85	87.500	376,487	27- 3-85	85.120	294,976
20- 8-84	67.250	150,884	30-10-84	72.750	209,874	16- 1-85	87.250	434,640	28- 3-85	84.500	198,604
21- 8-84	67.120	115,558	31-10-84	72.250	165,703	17- 1-85	87.250	216,398	29- 3-85	86.250	248,136
22- 8-84	66.500	91,040	2-11-84	74.120	334,758	18- 1-85	89.370	402,730	1- 4-85	85.750	116,303
23- 8-84	65.750	57,135	5-11-84	74.500	167,861	21- 1-85	89.750	264,358	2- 4-85	85.120	82,423
24- 8-84	66.000	120,694	6-11-84	74.120	124,073	22- 1-85	87.500	302,910	3- 4-85	84.750	75,578
27- 8-84	64.750	98,857	7-11-84	74.250	245,915	23- 1-85	86.750	216,570	8- 4-85	85.250	93,101
28- 8-84	64.750	74,261	8-11-84	71.870	331,949	24- 1-85	88.750	274,412	9- 4-85	84.870	46,128
29- 8-84	64.250	78,726	12-11-84	73.620	275,576	25- 1-85	88.750	601,660	10- 4-85	84.000	117,406
30- 8-84	65.750	83,565	13-11-84	73.500	197,345	28- 1-85	91.620	431,803	11- 4-85	82.750	167,472
31- 8-84	65.500	55,982	14-11-84	73.120	258,201	29- 1-85	91.250	491,420	12- 4-85	81.500	228,202
3- 9-84	65.250	95,422	15-11-84	72.500	199,511	30- 1-85	91.620	335,409	15- 4-85	80.500	131,522
4- 9-84	65.870	318,579	16-11-84	74.370	387,831	31- 1-85	92.870	409,765	16- 4-85	81.500	148,404
5- 9-84	69.000	317,925	19-11-84	77.250	428,995	1- 2-85	93.750	410,443	17- 4-85	84.870	207,382
6- 9-84	68.370	170,853	20-11-84	74.500	257,591	4- 2-85	96.250	632,547	18- 4-85	82.500	161,872
7- 9-84	69.750	541,183	21-11-84	76.750	348,605	5- 2-85	93.250	573,358	19- 4-85	80.750	308,654
10- 9-84	71.750	319,020	22-11-84	75.750	253,952	6- 2-85	94.500	427,302	22- 4-85	83.370	244,521
11- 9-84	71.870	255,952	23-11-84	77.750	297,738	7- 2-85	91.120	587,243	23- 4-85	82.750	80,342
12- 9-84	72.250	221,144	26-11-84	77.870	238,276	8- 2-85	90.250	480,151	24- 4-85	82.750	142,138
13- 9-84	74.000	406,812	27-11-84	76.500	223,881	11- 2-85	91.870	180,017	25- 4-85	81.120	168,537
14- 9-84	73.250	272,091	28-11-84	77.250	160,737	12- 2-85	94.000	256,106	26- 4-85	81.120	349,639
17- 9-84	74.870	245,347	29-11-84	77.750	137,298	13- 2-85	92.870	370,359	29- 4-85	81.000	104,576
18- 9-84	76.500	309,442	30-11-84	76.500	190,129	14- 2-85	93.870	175,579	30- 4-85	82.000	125,009
19- 9-84	75.370	191,723	3-12-84	75.750	152,768	15- 2-85	93.870	364,718	3- 5-85	84.000	127,533
20- 9-84	75.250	219,248	4-12-84	74.250	229,887	18- 2-85	94.000	218,461	6- 5-85	83.750	114,007
21- 9-84	75.250	1[illegible],157	[illegible]-84	73.750	244,313	19- 2-85	91.870	219,984	7- 5-85	83.500	70,578
24- 9-84	75.500	270,805	6-12-84	72.750	171,2[illegible]	[illegible]	92.370	143,423	8- 5-85	84.370	102,979
25- 9-84	75.500	31[illegible],705	7-12-84	69.250	568,485	21- 2-85	91.120	207,170	9- 5-85	85.500	176,686
26- 9-84	75.250	226,490	10-12-84	73.250	296,437	22- 2-85	90.000	458,811	10- 5-85	84.750	177,205
27- 9-84	76.000	199,465	11-12-84	75.750	476,127	25- 2-85	86.870	467,197	13- 5-85	85.120	178,480
28- 9-84	77.750	321,930	12-12-84	75.370	181,407	26- 2-85	84.750	422,056	14- 5-85	86.250	159,328
1-10-84	81.250	260,408	13-12-84	75.870	249,322	27- 2-85	86.000	394,630	16- 5-85	86.500	279,309

- 356 -

COTIZACIONES DE VALORES
IBERDUERO

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	63.000	77,073	2-10-84	88.250	313,043	14-12-84	81.750	185,814	28- 2-85	95.000	183,737
23- 7-84	63.000	47,594	3-10-84	90.500	224,510	17-12-84	79.870	267,789	1- 3-85	96.250	118,354
24- 7-84	62.750	42,603	4-10-84	89.000	428,795	18-12-84	83.250	230,348	4- 3-85	98.500	194,502
26- 7-84	63.000	93,655	5-10-84	89.000	196,466	19-12-84	81.870	236,501	5- 3-85	95.750	126,900
27- 7-84	63.250	158,059	8-10-84	89.870	379,025	20-12-84	81.500	153,130	6- 3-85	95.500	52,090
30- 7-84	63.750	129,772	9-10-84	87.000	281,463	21-12-84	81.750	208,055	7- 3-85	92.370	240,265
31- 7-84	66.250	177,642	10-10-84	86.370	162,252	26-12-84	83.000	357,466	8- 3-85	92.500	214,095
1- 8-84	66.750	144,593	11-10-84	85.250	444,087	27-12-84	83.500	348,561	11- 3-85	95.750	200,161
2- 8-84	66.250	72,391	15-10-84	88.620	264,858	28-12-84	83.500	426,649	12- 3-85	94.750	116,947
3- 8-84	69.750	162,539	16-10-84	87.500	334,541	2- 1-85	81.500	218,783	13- 3-85	93.500	149,351
6- 8-84	74.000	240,288	17-10-84	85.370	158,739	3- 1-85	83.000	129,409	14- 3-85	94.120	128,108
7- 8-84	72.000	247,075	18-10-84	83.750	204,855	4- 1-85	87.000	650,588	15- 3-85	97.500	233,499
8- 8-84	72.000	106,990	19-10-84	83.000	519,088	7- 1-85	87.000	232,007	18- 3-85	98.250	105,816
9- 8-84	71.000	57,928	22-10-84	83.250	363,201	8- 1-85	86.000	132,327	20- 3-85	99.500	164,897
10- 8-84	70.000	139,467	23-10-84	84.000	127,201	9- 1-85	85.750	236,606	21- 3-85	99.000	90,068
13- 8-84	69.250	79,663	24-10-84	84.250	95,050	10- 1-85	87.500	256,355	22- 3-85	97.750	226,272
14- 8-84	67.500	209,749	25-10-84	81.750	96,147	11- 1-85	87.500	474,877	25- 3-85	98.000	171,179
16- 8-84	71.000	81,130	26-10-84	82.000	108,023	14- 1-85	88.750	225,614	26- 3-85	99.500	69,501
17- 8-84	72.000	156,135	29-10-84	80.750	86,114	15- 1-85	91.000	391,731	27- 3-85	96.500	187,321
20- 8-84	74.000	135,044	30-10-84	78.500	124,032	16- 1-85	89.500	248,068	28- 3-85	95.500	209,704
21- 8-84	72.500	71,915	31-10-84	78.000	192,646	17- 1-85	89.870	246,244	29- 3-85	95.750	176,973
22- 8-84	72.250	83,963	2-11-84	80.250	225,295	18- 1-85	91.000	225,936	1- 4-85	97.000	48,036
23- 8-84	72.750	65,040	5-11-84	81.250	172,963	21- 1-85	91.750	215,849	2- 4-85	96.750	66,218
24- 8-84	72.000	86,418	6-11-84	81.500	356,152	22- 1-85	89.000	215,943	3- 4-85	95.500	113,425
27- 8-84	70.750	80,731	7-11-84	80.500	91,212	23- 1-85	90.250	188,537	8- 4-85	97.870	34,318
28- 8-84	70.750	51,081	8-11-84	80.120	192,874	24- 1-85	92.750	229,899	9- 4-85	96.500	23,407
29- 8-84	71.000	48,778	12-11-84	81.750	204,037	25- 1-85	94.500	336,188	10- 4-85	95.750	40,401
30- 8-84	72.000	52,092	13-11-84	80.000	115,172	28- 1-85	97.370	348,379	11- 4-85	94.250	119,580
31- 8-84	71.000	272,030	14-11-84	79.750	146,092	29- 1-85	99.000	367,513	12- 4-85	92.620	173,946
3- 9-84	70.750	98,688	15-11-84	80.250	96,684	30- 1-85	98.000	278,972	15- 4-85	92.000	115,136
4- 9-84	73.000	109,063	16-11-84	84.120	289,749	31- 1-85	100.500	336,849	16- 4-85	94.250	97,365
5- 9-84	75.370	149,357	19-11-84	83.000	205,705	1- 2-85	104.000	462,939	17- 4-85	96.250	187,282
6- 9-84	75.000	188,109	20-11-84	84.750	183,082	4- 2-85	109.500	505,667	18- 4-85	93.000	199,383
7- 9-84	74.750	418,772	21-11-84	85.620	180,421	5- 2-85	104.000	325,033	19- 4-85	93.000	158,470
10- 9-84	76.750	140,594	22-11-84	85.000	115,953	6- 2-85	106.500	340,773	22- 4-85	94.500	125,784
11- 9-84	77.250	168,067	23-11-84	87.750	350,131	7- 2-85	101.000	270,965	23- 4-85	95.000	75,226
12- 9-84	78.250	140,016	26-11-84	86.000	152,280	8- 2-85	102.870	377,861	24- 4-85	94.000	68,368
13- 9-84	78.500	168,902	27-11-84	84.500	105,599	11- 2-85	103.500	236,274	25- 4-85	94.250	74,618
14- 9-84	77.000	179,968	28-11-84	85.250	77,593	12- 2-85	104.000	195,111	26- 4-85	93.620	348,783
17- 9-84	79.750	196,933	29-11-84	84.750	65,234	13- 2-85	102.000	139,774	29- 4-85	93.250	42,437
18- 9-84	80.000	155,236	30-11-84	83.870	232,223	14- 2-85	103.250	280,254	30- 4-85	94.000	92,647
19- 9-84	79.870	102,030	3-12-84	82.370	140,488	15- 2-85	102.250	234,697	3- 5-85	95.500	83,078
20- 9-84	79.750	164,628	4-12-84	81.620	101,132	18- 2-85	102.500	283,174	6- 5-85	95.000	47,054
21- 9-84	79.750	121,764	5-12-84	81.870	129,079	19- 2-85	100.620	186,392	7- 5-85	94.000	87,516
24- 9-84	80.750	201,360	6-12-84	81.250	126,339	20- 2-85	101.250	97,188	8- 5-85	94.750	177,380
25- 9-84	81.250	104,618	7-12-84	77.120	457,355	21- 2-85	98.000	324,901	9- 5-85	96.370	300,992
26- 9-84	80.500	100,577	10-12-84	81.500	0	22- 2-85	96.120	465,410	10- 5-85	95.250	177,536
27- 9-84	81.870	166,329	11-12-84	82.000	366,681	25- 2-85	93.500	376,969	13- 5-85	96.250	139,250
28- 9-84	84.000	267,276	12-12-84	81.750	95,893	26- 2-85	95.000	410,318	14- 5-85	95.250	188,188
1-10-84	83.250	314,291	13-12-84	81.750	481,246	27- 2-85	93.000	256,129	16- 5-85	95.500	106,837

COTIZACIONES DE VALORES
SEVILLANA

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	53.000	78,899	2-10-84	71.250	179,197	14-12-84	65.000	246,400	28- 2-85	75.370	138,782
23- 7-84	54.000	141,206	3-10-84	73.500	221,589	17-12-84	64.750	340,218	1- 3-85	76.000	102,410
24- 7-84	53.000	89,382	4-10-84	73.370	382,460	18-12-84	66.750	384,312	4- 3-85	78.250	141,655
26- 7-84	53.500	96,862	5-10-84	73.120	166,837	19-12-84	66.500	120,201	5- 3-85	77.000	100,574
27- 7-84	53.500	90,705	8-10-84	75.000	271,225	20-12-84	64.750	174,752	6- 3-85	76.000	116,513
30- 7-84	55.000	130,324	9-10-84	73.620	251,569	21-12-84	64.250	237,926	7- 3-85	73.000	156,183
31- 7-84	58.000	138,423	10-10-84	72.250	250,747	26-12-84	65.620	328,695	8- 3-85	72.000	187,388
1- 8-84	58.000	124,665	11-10-84	71.120	224,691	27-12-84	67.000	439,758	11- 3-85	73.500	150,574
2- 8-84	58.120	88,587	15-10-84	74.370	121,378	28-12-84	66.500	210,335	12- 3-85	73.500	123,118
3- 8-84	61.000	164,285	16-10-84	74.750	128,866	2- 1-85	67.500	160,998	13- 3-85	72.000	105,352
6- 8-84	62.500	199,053	17-10-84	71.750	126,127	3- 1-85	68.750	140,312	14- 3-85	72.750	95,453
7- 8-84	63.000	188,805	18-10-84	71.250	193,958	4- 1-85	69.250	99,597	15- 3-85	74.500	167,603
8- 8-84	61.370	84,089	19-10-84	69.000	217,524	7- 1-85	71.120	326,059	18- 3-85	76.000	90,663
9- 8-84	60.620	94,909	22-10-84	67.250	256,664	8- 1-85	71.250	374,817	20- 3-85	77.500	101,948
10- 8-84	59.750	85,835	23-10-84	68.750	149,156	9- 1-85	69.370	123,978	21- 3-85	77.120	114,064
13- 8-84	57.500	91,026	24-10-84	69.750	149,575	10- 1-85	72.250	360,418	22- 3-85	76.250	87,965
14- 8-84	56.620	107,071	25-10-84	67.620	103,459	11- 1-85	72.750	452,912	25- 3-85	77.250	128,253
16- 8-84	59.500	63,829	26-10-84	67.120	103,691	14- 1-85	73.500	292,901	26- 3-85	78.370	85,871
17- 8-84	60.000	106,928	29-10-84	67.500	86,934	15- 1-85	75.750	269,861	27- 3-85	76.000	201,134
20- 8-84	61.500	100,544	30-10-84	66.000	89,915	16- 1-85	76.250	267,427	28- 3-85	75.000	160,937
21- 8-84	61.750	85,990	31-10-84	65.500	90,328	17- 1-85	76.000	176,609	29- 3-85	76.500	142,583
22- 8-84	60.500	75,619	2-11-84	67.500	69,014	18- 1-85	77.500	296,031	1- 4-85	77.120	63,136
23- 8-84	59.750	42,590	5-11-84	68.870	137,984	21- 1-85	77.250	243,815	2- 4-85	76.750	31,391
24- 8-84	60.500	75,182	6-11-84	67.250	99,239	22- 1-85	76.000	206,908	3- 4-85	75.120	68,761
27- 8-84	60.120	57,592	7-11-84	66.500	141,509	23- 1-85	75.000	175,226	8- 4-85	76.500	32,773
28- 8-84	59.500	58,515	8-11-84	63.250	247,085	24- 1-85	76.370	164,561	9- 4-85	77.000	44,773
29- 8-84	60.000	45,203	12-11-84	66.500	159,194	25- 1-85	76.870	268,471	10- 4-85	75.370	90,187
30- 8-84	60.870	42,420	13-11-84	66.000	93,336	28- 1-85	78.250	267,450	11- 4-85	74.000	79,409
31- 8-84	60.750	63,450	14-11-84	65.500	72,214	29- 1-85	79.750	406,794	12- 4-85	72.120	119,858
3- 9-84	60.750	63,073	15-11-84	66.120	91,122	30- 1-85	78.500	346,323	15- 4-85	71.750	68,694
4- 9-84	61.750	52,448	16-11-84	69.120	210,544	31- 1-85	81.250	193,818	16- 4-85	73.500	115,401
5- 9-84	65.000	512,480	19-11-84	70.000	215,654	1- 2-85	82.250	256,423	17- 4-85	76.870	125,669
6- 9-84	64.750	114,733	20-11-84	70.500	171,354	4- 2-85	86.500	323,368	18- 4-85	73.500	105,551
7- 9-84	65.120	201,359	21-11-84	71.750	215,722	5- 2-85	82.500	373,009	19- 4-85	74.000	133,404
10- 9-84	67.000	201,336	22-11-84	71.750	116,764	6- 2-85	84.870	324,634	22- 4-85	74.500	104,502
11- 9-84	67.620	179,750	23-11-84	75.000	443,994	7- 2-85	80.500	234,913	23- 4-85	72.750	76,176
12- 9-84	67.120	114,400	26-11-84	75.000	198,948	8- 2-85	80.750	347,605	24- 4-85	72.250	141,456
13- 9-84	67.500	119,146	27-11-84	73.500	130,069	11- 2-85	82.500	239,773	25- 4-85	71.750	186,307
14- 9-84	65.870	243,384	28-11-84	74.120	110,627	12- 2-85	84.000	207,137	26- 4-85	73.000	250,967
17- 9-84	67.120	157,207	29-11-84	74.120	124,262	13- 2-85	83.250	197,319	29- 4-85	73.500	56,040
18- 9-84	68.370	168,332	30-11-84	74.250	284,531	14- 2-85	84.120	185,148	30- 4-85	75.000	77,496
19- 9-84	66.750	143,878	3-12-84	68.370	314,780	15- 2-85	84.250	259,879	3- 5-85	76.000	30,409
20- 9-84	66.870	137,208	4-12-84	68.250	143,676	18- 2-85	84.120	146,289	6- 5-85	76.000	93,167
21- 9-84	66.250	107,653	5-12-84	67.250	127,677	19- 2-85	81.120	274,032	7- 5-85	76.000	132,972
24- 9-84	66.500	146,152	6-12-84	66.120	112,778	20- 2-85	81.750	199,061	8- 5-85	78.500	175,169
25- 9-84	66.750	127,134	7-12-84	62.750	517,152	21- 2-85	79.500	275,431	9- 5-85	80.000	191,544
26- 9-84	66.000	257,968	10-12-84	67.000	257,350	22- 2-85	79.000	286,425	10- 5-85	80.000	188,574
27- 9-84	66.250	195,261	11-12-84	67.000	195,985	25- 2-85	76.250	278,156	13- 5-85	81.000	136,329
28- 9-84	68.000	315,966	12-12-84	66.000	215,656	26- 2-85	75.000	156,592	14- 5-85	81.500	45,216
1-10-84	71.500	127,494	13-12-84	65.250	100,443	27- 2-85	76.000	230,009	16- 5-85	80.250	111,425

COTIZACIONES DE VALORES
UNION-FENOS

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	52.750	54,835	2-10-84	69.120	214,436	14-12-84	67.000	187,527	28- 2-85	75.370	193,578
23- 7-84	53.750	125,809	3-10-84	69.750	250,482	17-12-84	67.250	254,945	1- 3-85	76.500	169,122
24- 7-84	53.870	99,038	4-10-84	72.750	420,169	18-12-84	68.750	593,884	4- 3-85	77.500	246,013
26- 7-84	53.870	85,426	5-10-84	72.750	502,578	19-12-84	67.870	194,685	5- 3-85	76.000	117,909
27- 7-84	53.870	129,384	8-10-84	75.000	545,8[illegible]	20-12-84	66.750	228,093	6- 3-85	74.870	153,910
30- 7-84	55.370	252,894	9-10-84	73.620	371,478	21-12-84	66.870	146,730	7- 3-85	72.120	270,557
31- 7-84	58.250	233,811	10-10-84	73.750	475,754	26-12-84	68.000	267,624	8- 3-85	73.500	371,806
1- 8-84	58.750	197,171	11-10-84	71.250	392,885	27-12-84	68.750	455,831	11- 3-85	73.500	306,214
2- 8-84	59.250	219,038	15-10-84	73.250	300,016	28-12-84	68.750	292,535	12- 3-85	72.750	183,649
3- 8-84	62.250	314,117	16-10-84	73.620	355,482	2- 1-85	[illegible].500	150,202	13- 3-85	71.000	180,344
6- 8-84	65.370	378,361	17-10-84	70.870	323,128	3- 1-85	66.870	287,968	14- 3-85	72.000	104,801
7- 8-84	62.870	216,846	18-10-84	70.250	288,696	4- 1-85	69.500	595,928	15- 3-85	73.500	180,447
8- 8-84	63.500	144,779	19-10-84	67.750	255,506	7- 1-85	69.750	265,386	18- 3-85	76.120	253,558
9- 8-84	62.120	129,365	22-10-84	66.000	320,950	8- 1-85	69.620	265,570	20- 3-85	77.250	271,075
10- 8-84	61.500	198,949	23-10-84	67.870	215,437	9- 1-85	69.000	336,285	21- 3-85	76.370	117,525
13- 8-84	58.000	249,775	24-10-84	68.870	309,198	10- 1-85	72.000	515,516	22- 3-85	75.120	254,726
14- 8-84	58.000	270,444	25-10-84	65.250	192,315	11- 1-85	71.750	576,731	25- 3-85	76.000	169,[illegible]
16- 8-84	61.000	194,636	26-10-84	65.750	401,656	14- 1-85	74.000	388,574	26- 3-85	76.750	115,454
17- 8-84	61.250	164,509	29-10-84	66.500	185,618	15- 1-85	75.000	388,566	27- 3-85	73.750	293,736
20- 8-84	62.670	210,854	30-10-84	63.000	166,928	16- 1-85	74.620	348,195	28- 3-85	74.250	155,161
21- 8-84	62.620	70,000	31-10-84	64.000	306,864	17- 1-85	74.870	270,151	29- 3-85	75.120	200,929
22- 8-84	61.620	67,281	2-11-84	65.750	237,900	18- 1-85	75.500	429,207	1- 4-85	76.000	83,508
23- 8-84	62.000	68,084	5-11-84	66.120	250,113	21- 1-85	74.500	533,392	2- 4-85	76.000	140,881
24- 8-84	61.750	96,767	6-11-84	66.000	229,408	22- 1-85	73.620	407,781	3- 4-85	75.250	48,365
27- 8-84	61.000	64,540	7-11-84	64.250	144,025	23- 1-85	74.250	382,658	8- 4-85	76.500	105,246
28- 8-84	60.250	105,738	8-11-84	63.000	216,246	24- 1-85	75.000	333,835	9- 4-85	76.000	85,118
29- 8-84	60.250	86,828	12-11-84	64.500	278,005	25- 1-85	76.500	403,806	10- 4-85	74.000	127,578
30- 8-84	61.250	104,796	13-11-84	64.000	155,019	28- 1-85	78.750	391,559	11- 4-85	72.250	188,836
31- 8-84	61.000	68,160	14-11-84	63.120	218,233	29- 1-85	79.370	409,319	12- 4-85	72.000	173,774
3- 9-84	61.000	89,080	15-11-84	65.000	150,489	30- 1-85	78.000	490,292	15- 4-85	71.370	93,685
4- 9-84	63.500	92,124	16-11-84	67.250	241,112	31- 1-85	81.000	683,603	16- 4-85	72.750	189,075
5- 9-84	65.000	292,003	19-11-84	67.500	224,998	1- 2-85	82.870	585,322	17- 4-85	75.000	258,438
6- 9-84	64.750	201,235	20-11-84	68.870	209,805	4- 2-85	86.750	832,168	18- 4-85	72.000	264,291
7- 9-84	65.000	538,845	21-11-84	70.250	490,640	5- 2-85	82.250	483,110	19- 4-85	74.370	244,859
10- 9-84	67.000	345,140	22-11-84	71.000	203,429	6- 2-85	84.500	317,443	22- 4-85	74.500	181,[illegible]
11- 9-84	66.250	420,498	23-11-84	73.370	419,532	7- 2-85	80.000	266,610	23- 4-85	74.000	55,248
12- 9-84	66.500	189,539	26-11-84	73.750	486,883	8- 2-85	79.120	683,120	24- 4-85	73.250	61,321
13- 9-84	66.370	226,274	27-11-84	72.870	224,206	11- 2-85	82.500	750,107	25- 4-85	73.500	172,404
14- 9-84	66.000	131,065	28-11-84	73.120	156,693	12- 2-85	84.000	588,227	26- 4-85	72.1[illegible]0	348,083
17- 9-84	67.100	280,507	29-11-84	73.000	282,402	13- 2-85	84.250	645,821	29- 4-85	72.750	64,395
18- 9-84	67.370	144,375	30-11-84	72.120	240,919	14- 2-85	84.870	484,381	30- 4-85	73.750	237,702
19- 9-84	66.250	112,774	3-12-84	71.120	200,972	15- 2-85	84.750	558,802	3- 5-85	74.500	169,437
20- 9-84	66.500	336,155	4-12-84	70.250	245,089	18- 2-85	83.620	180,818	6- 5-85	74.120	127,159
21- 9-84	66.620	133,244	5-12-84	66.870	250,039	19- 2-85	82.500	317,304	7- 5-85	74.250	160,134
24- 9-84	66.500	155,150	6-12-84	66.000	134,260	20- 2-85	82.500	227,243	8 5-85	75.870	254,264
25- 9-84	65.500	212,997	7-12-84	64.000	414,876	21- 2-85	78.750	457,486	9- 5-85	77.250	431,454
26- 9-84	64.500	145,888	10-12-84	67.120	393,056	22- 2-85	79.370	362,247	10- 5-85	77.250	474,087
27- 9-84	65.500	289,616	11-12-84	66.870	220,818	25- 2-85	75.620	389,955	13- 5-85	77.120	391,815
28- 9-84	67.000	402,612	12-12-84	66.870	205,692	26- 2-85	76.250	360,822	14- 5-85	77.250	187,484
1-10-84	69.620	344,717	13-12-84	67.000	117,554	27- 2-85	78.000	324,921	16- 5-85	77.000	311,268

COTIZACIONES DE VALORES
AZUCARERA

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	127.500	0	2-10-84	143.500	7,400	14-12-84	179.000	12,492	28- 2-85	230.000	6,903
23- 7-84	127.500	0	3-10-84	143.000	10,800	17-12-84	165.000	2,682	1- 3-85	237.000	16,869
24- 7-84	127.000	1,081	4-10-84	144.000	9,670	18-12-84	161.000	3,859	4- 3-85	240.000	9,758
26- 7-84	127.000	0	5-10-84	148.000	10,105	19-12-84	162.000	5,608	5- 3-85	244.000	7,089
27- 7-84	127.000	0	8-10-84	152.000	9,761	20-12-84	157.000	5,109	6- 3-85	235.000	5,562
30- 7-84	127.000	0	9-10-84	156.000	12,090	21-12-84	160.000	4,070	7- 3-85	230.000	6,657
31- 7-84	127.000	0	10-10-84	154.000	15,299	26-12-84	164.000	5,288	8- 3-85	225.000	11,085
1- 8-84	127.000	0	11-10-84	152.000	11,072	27-12-84	166.000	5,733	11- 3-85	231.000	11,213
2- 8-84	132.000	2,562	15-10-84	156.000	3,904	28-12-84	166.000	4,539	12- 3-85	232.000	5,871
3- 8-84	138.000	4,123	16-10-84	160.000	7,297	2- 1-85	170.000	4,584	13- 3-85	233.000	2,981
6- 8-84	138.000	0	17-10-84	168.000	11,744	3- 1-85	170.000	9,118	14- 3-85	234.000	1,600
7- 8-84	138.000	0	18-10-84	163.000	19,473	4- 1-85	173.000	11,277	15- 3-85	227.000	23,516
8- 8-84	138.000	3,207	19-10-84	155.000	10,890	7- 1-85	178.000	7,502	18- 3-85	231.000	9,190
9- 8-84	138.000	0	22-10-84	154.000	7,374	8- 1-85	176.000	4,710	20- 3-85	231.000	3,426
10- 8-84	138.000	0	23-10-84	157.000	5,741	9- 1-85	176.000	9,213	21- 3-85	231.000	4,788
13- 8-84	138.000	0	24-10-84	164.000	6,077	10- 1-85	183.000	13,828	22- 3-85	227.500	19,020
14- 8-84	135.000	1,823	25-10-84	160.000	1,538	11- 1-85	188.000	11,623	25- 3-85	230.000	6,580
16- 8-84	135.000	0	26-10-84	157.000	9,575	14- 1-85	194.500	13,061	26- 3-85	233.000	6,533
17- 8-84	135.000	181	29-10-84	160.000	4,778	15- 1-85	197.000	19,300	27- 3-85	226.000	9,540
20- 8-84	137.000	614	30-10-84	155.000	8,488	16- 1-85	202.000	8,266	28- 3-85	226.000	5,781
21- 8-84	133.000	2,358	31-10-84	152.500	4,175	17- 1-85	203.000	13,185	29- 3-85	226.000	7,358
22- 8-84	133.000	0	2 11-84	156.000	5,978	18- 1-85	200.000	14,257	1- 4-85	227.000	1,167
23- 8-84	133.000	0	5-11-84	162.000	4,458	21- 1-85	199.000	9,592	2- 4-85	228.000	2,088
24- 8-84	133.000	0	6-11-84	158.000	6,277	22- 1-85	198.000	7,878	3- 4-85	228.000	0
27- 8-84	136.000	3,143	7-11-84	154.000	5,509	23- 1-85	200.000	6,685	8- 4-85	229.000	3,805
28- 8-84	135.000	1,320	8-11-84	154.000	2,610	24- 1-85	200.000	1,550	9- 4-85	229.000	0
29- 8 84	135.000	590	12-11-84	160.000	6,344	25- 1-85	195.000	3,104	10- 4-85	225.000	0
30- 8 84	135.000	913	13-11-84	162.000	15,998	28- 1-85	195.000	2,800	11- 4-85	220.000	0
31- 8-84	135.000	0	14-11-84	162.000	14,655	29- 1-85	195.000	0	12- 4-85	215.000	0
3- 9-84	135.000	0	15-11-84	164.250	7,688	30- 1-85	190.000	5,484	15- 4-85	210.000	0
4- 9-84	135.000	3,279	16-11-84	172.000	11,354	31- 1-85	191.000	2,865	16- 4-85	210.000	0
5- 9-84	135.000	1,300	19-11-84	178.000	16,608	1- 2-85	193.000	3,201	17- 4-85	201.000	19,138
6- 9-84	135.000	730	20-11-84	172.000	10,415	4- 2-85	195.000	10,943	18- 4-85	206.000	8,664
7- 9-84	135.000	2,159	21-11-84	173.000	7,060	5- 2-85	197.000	9,620	19- 4-85	203.000	7,352
10- 9-84	135.000	0	22-11-84	170.000	6,100	6- 2-85	197.000	12,796	22- 4-85	207.000	10,689
11- 9-84	135.000	2,704	23-11-84	170.000	20,724	7- 2-85	197.000	4,400	23- 4-85	207.000	0
12- 9-84	134.000	2,848	26-11-84	178.000	14,245	8- 2-85	199.500	22,134	24- 4-85	200.000	6,035
13- 9-84	133.000	2,335	27-11-84	176.000	19,011	11- 2-85	202.000	6,290	25- 4-85	190.000	13,775
14- 9-84	133.000	0	28-11-84	172.000	5,823	12- 2-85	207.000	16,516	26- 4-85	188.000	9,333
17- 9-84	133.000	0	29-11-84	172.000	0	13- 2-85	217.000	11,190	29- 4-85	194.000	7,424
18- 9-84	133.000	2,829	30-11-84	170.000	14,514	14- 2-85	225.000	9,497	30- 4-85	197.000	3,288
19- 9-84	133.000	2,764	3-12-84	170.000	6,438	15- 2-85	224.000	21,415	3- 5-85	202.000	7,665
20- 9-84	135.000	790	4-12-84	170.000	7,544	18- 2-85	229.000	6,947	6- 5-85	198.000	6,205
21- 9-84	136.000	2,700	5-12-84	172.000	6,475	19- 2-85	235.000	10,282	7- 5-85	194.000	3,219
24- 9-84	137.000	0	6-12-84	172.000	2,942	20- 2-85	235.000	2,926	8- 5-85	198.000	930
25- 9-84	139.000	0	7-12-84	170.000	6,586	21- 2-85	231.000	3,442	9- 5-85	195.000	4,728
26- 9-84	142.000	0	10-12-84	175.000	6,260	22- 2-85	235.000	13,345	10- 5-85	196.000	28,918
27- 9-84	143.000	10,035	11-12-84	175.000	7,938	25- 2-85	230.000	5,352	13- 5-85	199.000	8,563
28- 9- 4	142.750	2,967	12-12-84	175.000	7,020	26- 2-85	235.000	10,263	14- 5-85	200.000	4,886
1-10- 4	144.500	9,690	13-12-84	177.000	12,941	27- 2-85	233.000	8,268	16- 5-85	200.000	5,675

COTIZACIONES DE VALORES
ASLAND

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	158.000	6,288	2-10-84	195.000	9,287	14-12-84	152.500	12,970	28- 2-85	148.000	9,[illegible]35
23- 7-84	156.250	5,570	3-10-84	194.000	8,082	17-12-84	154.000	4,993	1- 3-85	149.000	6,459
24- 7-84	159.000	3,375	4-10-84	192.500	5,980	18-12-84	155.000	10,895	4- 3-85	149.750	6,403
26- 7-84	159.500	10,930	5-10-84	191.000	11,439	19-12-84	1[illegible].000	16,674	5- 3-85	148.500	5,392
27- 7-84	159.000	2,785	8-10-84	190.000	11,358	20-12-84	154.000	9,183	6- 3-85	147.000	4,229
30- 7-84	160.000	14,975	9-10-84	188.000	3,122	21-12-84	153.000	7,703	7- 3-85	145.000	4,520
31- 7-84	163.000	19,197	10-10-84	183.000	5,296	26-12-84	153.000	0	8- 3-85	144.000	10,975
1- 8-84	165.000	14,380	11-10-84	179.000	10,457	27-12-84	146.000	15,142	11- 3-85	145.500	7,401
2- 8-84	166.000	9,520	15-10-84	180.000	33,300	28-12-84	147.000	7,069	12- 3-85	146.500	6,250
3- 8-84	169.000	7,220	16-10-84	179.000	16,551	2- 1-85	146.000	7,337	13- 3-85	147.500	6,797
6- 8-84	174.000	10,725	17-10-84	172.500	13,899	3- 1-85	149.000	5,707	14- 3-85	148.000	4,473
7- 8-84	168.000	8,104	18-10-84	172.000	20,678	4- 1-85	150.000	7,240	15- 3-85	147.000	10,644
8- 8-84	170.000	5,377	19-10-84	171.000	14,246	7- 1-85	155.000	14,495	18- 3-85	151.000	12,427
9- 8-84	171.000	11,358	22-10-84	170.250	12,460	8- 1-85	155.000	16,723	20- 3-85	152.000	24,490
10- 8-84	170.000	8,016	23-10-84	172.000	8,801	9- 1-85	155.000	9,670	21- 3-85	150.500	17,760
13- 8-84	166.000	2,465	24-10-84	172.500	3,829	10- 1-85	156.000	5,690	22- 3-85	149.000	8,721
14- 8-84	168.000	6,950	25-10-84	170.750	6,512	11- 1-85	157.000	15,537	25- 3-85	152.000	9,033
16- 8-84	171.000	28,033	26-10-84	170.000	7,056	14- 1-85	157.000	8,055	26- 3-85	1[illegible].000	27,131
17- 8-84	171.500	42,227	29-10-84	171.000	3,291	15- 1-85	159.000	19,363	27- 3-85	152.000	14,347
20- 8-84	180.000	36,763	30-10-84	170.000	4,360	16- 1-85	159.000	10,696	28- 3-85	149.500	11,673
21- 8-84	180.000	30,279	31-10-84	165.000	16,079	17- 1-85	155.000	5,815	29- 3-85	152.000	5,320
22- 8-84	179.000	8,600	2-11-84	169.500	10,461	18- 1-85	158.000	6,705	1- 4-85	152.000	0
23- 8-84	180.000	11,222	5-11-84	171.000	5,764	21- 1-85	155.000	9,780	2- 4-85	152.000	3,088
24- 8-84	180.000	10,181	6-11-84	168.000	7,729	22- 1-85	150.000	8,362	3- 4-85	149.500	3,036
27- 8-84	178.000	13,712	7-11-84	162.000	10,446	23- 1-85	149.000	13,026	8- 4-85	149.500	330
28- 8-84	178.000	5,734	8-11-84	162.000	18,904	24- 1-85	155.000	24,183	9- 4-85	150.500	2,670
29- 8-84	178.000	4,600	12-11-84	163.000	8,721	25- 1-85	155.000	16,350	10- 4-85	149.500	5,516
30- 8-84	178.000	4,427	13-11-84	162.000	11,407	28- 1-85	158.250	17,096	11- 4-85	144.000	9,984
31- 8-84	178.750	2,305	14-11-84	162.000	7,043	29- 1-85	159.000	11,100	12- 4-85	144.000	5,406
3- 9-84	179.000	5,284	15-11-84	163.000	4,675	30- 1-85	157.000	6,085	15- 4-85	144.500	9,550
4- 9-84	183.000	12,170	16-11-84	165.000	6,145	31- 1-85	154.000	11,169	16- 4-85	148.000	12,585
5- 9-84	187.000	12,956	19-11-84	167.000	13,261	1- 2-85	153.000	8,015	17- 4-85	150.000	13,200
6- 9-84	185.000	3,975	20-11-84	167.000	10,773	4- 2-85	153.000	8,346	18- 4-85	152.000	9,579
7- 9-84	185.000	15,970	21-11-84	163.000	6,143	5- 2-85	150.000	9,217	19- 4-85	154.000	58,15[illegible]
10- 9-84	185.000	11,020	22-11-84	160.000	8,775	6- 2-85	153.500	6,032	22- 4-85	153.000	5,470
11- 9-84	186.500	8,043	23-11-84	158.500	7,500	7- 2-85	150.000	9,521	23- 4-85	154.000	11,661
12- 9-84	187.000	27,085	26-11-84	159.000	3,480	8- 2-85	148.000	7,972	24- 4-85	154.000	17,966
13- 9-84	192.000	15,463	27-11-84	162.000	8,590	11- 2-85	150.000	8,290	25- 4-85	153.000	6,394
14- 9-84	188.000	17,929	28-11-84	167.000	3,506	12- 2-85	153.000	8,833	26- 4-85	151.000	25,[illegible]
17- 9-84	194.500	5,796	29-11-84	164.500	8,645	13- 2-85	153.000	31,459	29- 4-85	151.000	3,874
18- 9-84	194.000	8,895	30-11-84	162.000	8,512	14- 2-85	153.000	9,395	30- 4-85	151.500	6,567
19- 9-84	191.000	14,910	3-12-84	163.000	5,008	15- 2-85	152.750	4,292	3- 5-85	150.000	4,490
20- 9-84	194.000	7,912	4-12-84	162.000	7,236	18- 2-85	153.000	16,204	6- 5-85	149.500	2,900
21- 9-84	190.500	15,125	5-12-84	160.000	5,496	19- 2-85	151.000	10,550	7- 5-85	150.250	3,828
24- 9-84	190.000	13,599	6-12-84	159.500	5,831	20- 2-85	152.500	29,683	8- 5-85	150.250	0
25- 9-84	191.000	8,940	7-12-84	158.000	6,420	21- 2-85	151.000	5,617	9- 5-85	149.000	3,615
26- 9-84	188.000	3,178	10-12-84	158.000	23,609	22- 2-85	149.000	10,395	10- 5-85	146.500	15,201
27- 9-84	189.000	11,915	11-12-84	154.000	5,110	25- 2-85	149.000	5,279	13- 5-85	149.500	3,108
28- 9-84	190.500	6,256	12-12-84	154.000	30,475	26- 2-85	149.000	8,324	14- 5-85	149.250	5,375
1-10-84	194.500	16,409	13-12-84	154.500	5,144	27- 2-85	[illegible]	11,420	16- 5-85	149.000	10,840

COTIZACIONES DE VALORES
VALDERRIVAS

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	331.000	880	2-10-84	355.000	3,846	14-12-84	300.000	0	28- 2-85	305.000	543
23- 7-84	331.000	0	3-10-84	353.000	4,798	17-12-84	295.000	717	1- 3-85	306.000	548
24- 7-84	331.000	158	4-10-84	353.000	0	18-12-84	295.000	0	4- 3-85	307.000	440
26- 7-84	331.000	0	5-10-84	360.000	2,558	19-12-84	295.000	755	5- 3-85	309.000	650
27- 7-84	331.000	620	8-10-84	378.000	6,970	20-12-84	298.000	321	6- 3-85	310.000	472
30- 7-84	331.000	195	9-10-84	378.000	5,650	21-12-84	299.000	210	7- 3-85	308.000	360
31- 7-84	331.000	0	10-10-84	370.000	2,660	26-12-84	310.000	1,436	8- 3-85	308.000	902
1- 8-84	320.000	858	11-10-84	366.000	3,362	27-12-84	312.000	591	11- 3-85	309.000	479
2- 8-84	320.000	0	15-10-84	368.000	1,572	28-12-84	312.000	0	12- 3-85	312.000	645
3- 8-84	330.000	805	16-10-84	376.000	1,755	2- 1-85	300.000	400	13- 3-85	312.000	451
6- 8-84	330.000	0	17-10-84	376.000	1,726	3- 1-85	295.000	1,030	14- 3-85	313.000	1,101
7- 8-84	335.000	1,119	18-10-84	376.000	0	4- 1-85	300.000	614	15- 3-85	313.000	1,213
8- 8-84	335.000	0	19-10-84	376.000	0	7- 1-85	300.000	0	18- 3-85	312.000	715
9- 8-84	335.000	0	22-10-84	365.000	1,576	8- 1-85	301.000	1,014	20- 3-85	312.000	2,283
10- 8-84	335.000	741	23-10-84	360.000	2,348	9- 1-85	301.000	0	21- 3-85	314.000	289
3- 8-84	335.000	0	24-10-84	362.000	1,294	10- 1-85	306.000	0	22- 3-85	311.000	200
14- 8-84	330.000	690	25-10-84	362.000	1,256	11- 1-85	310.000	0	25- 3-85	311.000	77
16- 8-84	330.000	0	26-10-84	360.000	1,028	14- 1-85	320.000	1,764	26- 3-85	314.000	400
17- 8-84	330.000	0	29-10-84	358.000	2,269	15- 1-85	310.000	414	27- 3-85	313.000	1,680
20- 8-84	335.000	1,147	30-10-84	348.000	3,650	16- 1-85	315.000	787	28- 3-85	313.000	6,129
21- 8-84	335.000	0	31-10-84	338.000	2,808	17- 1-85	318.000	970	29- 3-85	313.000	1,095
22- 8-84	340.000	1,417	2-11-84	306.000	379	18- 1-85	315.000	1,200	1- 4-85	313.000	1,024
23- 8-84	340.000	1,100	5-11-84	308.000	1,594	21- 1-85	307.000	562	2- 4-85	313.000	840
24- 8-84	340.000	0	6-11-84	315.000	2,579	22- 1-85	300.000	621	3- 4-85	313.000	1,000
27- 8-84	340.000	0	7-11-84	317.000	4,197	23- 1-85	301.000	749	8- 4-85	313.000	205
28- 8-84	340.000	0	8-11-84	315.000	1,191	24- 1-85	305.000	341	9- 4-85	314.000	272
29- 8-84	335.000	757	12-11-84	317.000	747	25- 1-85	302.000	328	10- 4-85	315.000	614
30- 8-84	335.000	0	13-11-84	320.000	1,858	28- 1-85	302.000	0	11- 4-85	315.000	400
31- 8-84	335.000	830	14-11-84	320.000	0	29- 1-85	309.000	550	12- 4-85	310.000	1,900
3- 9-84	335.000	0	15-11-84	315.000	805	30- 1-85	310.000	368	15- 4-85	305.000	1,260
4- 9-84	335.000	0	16-11-84	315.000	744	31- 1-85	310.000	470	16- 4-85	303.000	3,295
5- 9-84	335.000	2,194	19-11-84	317.000	617	1- 2-85	310.000	400	17- 4-85	311.000	0
6- 9-84	340.000	1,245	20-11-84	320.000	1,074	4- 2-85	311.000	1,473	18- 4-85	312.000	4,206
7- 9-84	340.000	0	21-11-84	320.000	869	5- 2-85	309.000	1,108	19- 4-85	313.000	1,660
10- 9-84	340.000	382	22-11-84	320.000	0	6- 2-85	300.000	2,082	22- 4-85	314.000	2,281
11- 9-84	340.000	0	23-11-84	318.000	1,252	7- 2-85	302.000	1,055	23- 4-85	315.000	2,211
12- 9-84	340.000	458	26-11-84	318.000	0	8- 2-85	303.000	773	24- 4-85	315.000	1,441
13- 9-84	340.000	592	27-11-84	315.000	1,416	11- 2-85	303.000	0	25- 4-85	314.000	1,472
14- 9-84	335.000	1,190	28-11-84	315.000	5,260	12- 2-85	302.000	1,605	26- 4-85	312.000	4,835
17- 9-84	335.000	1,237	29-11-84	315.000	0	13- 2-85	300.000	555	29- 4-85	310.000	4,031
18- 9-84	340.000	1,200	30-11-84	315.000	0	14- 2-85	303.000	36,559	30- 4-85	310.000	2,000
19- 9-84	343.000	3,192	3-12-84	313.000	1,237	15- 2-85	303.000	1,031	3- 5-85	306.000	4,608
20- 9-84	345.000	3,280	4-12-84	311.000	1,000	18- 2-85	315.000	2,039	6- 5-85	302.000	1,832
21- 9-84	350.000	3,225	5-12-84	300.000	500	19- 2-85	313.000	869	7- 5-85	301.000	2,530
24- 9-84	348.000	2,290	6-12-84	295.000	1,125	20- 2-85	310.000	1,585	8- 5-85	300.000	4,178
25- 9-84	348.000	0	7-12-84	290.000	625	21- 2-85	306.000	1,530	9- 5-85	303.000	1,420
26- 9-84	348.000	2,295	10-12-84	300.000	1,095	22- 2-85	307.000	1,090	10- 5-85	303.000	1,245
27- 9-84	348.000	1,242	11-12-84	300.000	841	25- 2-85	305.000	970	13- 5-85	300.000	3,408
28- 9-84	348.000	1,748	12-12-84	300.000	0	26- 2-85	306.000	1,083	14- 5-85	301.000	1,969
1-10-84	348.000	0	13-12-84	300.000	493	27- 2-85	305.000	1,104	16- 5-85	305.000	1,920

COTIZACIONES DE VALORES
DRAGADOS OR

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	155.000	5,575	2-10-84	181.000	56,279	14-12-84	155.000	18,128	28- 2-85	183.000	46,774
23- 7-84	155.000	2,602	3-10-84	176.000	15,620	17-12-84	155.000	4,050	1- 3-85	183.500	27,033
24- 7-84	155.000	7,309	4-10-84	180.000	22,931	18-12-84	156.000	6,091	4- 3-85	183.500	26,130
26- 7-84	157.000	5,053	5-10-84	180.000	18,668	19-12-84	156.000	11,595	5- 3-85	180.000	16,590
27- 7-84	160.000	13,930	8-10-84	180.000	26,462	20-12-84	155.000	15,849	6- 3-85	177.000	17,333
30- 7-84	159.000	1,808	9-10-84	180.000	27,817	21-12-84	155.000	4,020	7- 3-85	168.000	20,137
31- 7-84	159.000	23,541	10-10-84	178.750	16,131	24-12-84	155.000	6,446	8- 3-85	171.500	25,091
1- 8-84	160.000	8,035	11-10-84	175.000	18,498	27-12-84	153.000	31,264	11- 3-85	177.500	28,234
2- 8-84	160.000	7,572	15-10-84	177.000	20,753	28-12-84	153.000	10,608	12- 3-85	179.500	50,[illegible]
3- 8-84	163.000	15,678	16-10-84	173.000	14,265	2- 1-85	160.000	5,654	13- 3-85	176.000	19,770
6- 8-84	165.000	15,688	17-10-84	168.000	15,202	3- 1-85	165.500	19,381	14- 3-85	174.500	18,016
7- 8-84	167.000	16,462	18-10-84	163.000	27,227	4- 1-85	166.000	16,590	15- 3-85	174.500	12,534
8- 8-84	166.000	7,228	19-10-84	163.000	30,823	7- 1-85	168.000	18,006	18- 3-85	176.000	17,812
9- 8-84	166.000	7,230	22-10-84	158.500	33,269	8- 1-85	166.000	7,110	20- 3-85	177.000	20,802
10- 8-84	163.000	8,350	23-10-84	164.000	36,693	9- 1-85	168.000	9,268	21- 3-85	177.000	19,797
13- 8-84	160.000	4,700	24-10-84	167.500	66,150	10- 1-85	170.000	18,211	22- 3-85	175.000	10,751
14- 8-84	157.000	4,183	25-10-84	163.000	23,635	11- 1-85	174.000	35,360	25- 3-85	175.000	4,939
16- 8-84	160.000	9,578	26-10-84	163.000	14,854	14- 1-85	174.500	18,219	26- 3-85	175.000	9,401
17- 8-84	164.000	13,900	29-10-84	160.000	9,562	15- 1-85	176.000	29,424	27- 3-85	174.000	6,066
20- 8-84	169.000	9,745	30-10-84	159.000	9,916	16- 1-85	174.000	16,432	28- 3-85	172.000	5,310
21- 8-84	169.000	5,645	31-10-84	159.000	5,322	17- 1-85	170.000	34,826	29- 3-85	[illegible]	21,183
22- 8-84	169.000	6,265	2-11-84	162.000	34,893	18- 1-85	170.000	33,492	1- 4-85	173.000	10,362
23- 8-84	165.000	5,324	5-11-84	159.000	9,817	21- 1-85	166.000	14,454	2- 4-85	175.000	19,563
24- 8-84	167.000	9,435	6-11-84	155.000	50,552	22- 1-85	168.000	9,966	3- 4-85	175.000	3,771
27- 8-84	164.000	5,454	7-11-84	15[illegible].000	21,311	23- 1-85	166.000	5,906	8- 4-85	173.000	3,937
28- 8-84	162.000	5,597	8-11-84	148.000	45,067	24- 1-85	169.000	8,437	9- 4-85	173.000	6,907
29- 8-84	163.000	8,310	12-11-84	153.000	80,752	25- 1-85	169.000	44,638	10- 4-85	169.000	14,266
30- 8-84	164.000	8,849	13-11-84	151.000	5,412	28- 1-85	169.000	31,262	11- 4-85	170.000	31,397
31- 8-84	165.000	12,264	14-11-84	152.000	7,660	29- 1-85	169.000	30,729	12- 4-85	169.250	33,869
3- 9-84	163.000	10,967	15-11-84	154.000	5,714	30- 1-85	169.000	31,690	15- 4-85	164.000	17,448
4- 9-84	166.000	7,147	16-11-84	157.000	10,467	31- 1-85	170.500	74,906	16- 4-85	166.500	8,260
5- 9-84	172.000	14,270	19-11-84	160.000	28,202	1- 2-85	170.500	42,160	17- 4-85	174.500	35,019
6- 9-84	170.500	19,562	20-11-84	162.000	40,069	4- 2-85	167.500	42,255	18- 4-85	172.000	22,985
7- 9-84	172.500	45,652	21-11-84	164.000	8,329	5- 2-85	166.000	8,610	19- 4-85	173.000	17,934
10- 9-84	177.000	48,869	22-11-84	162.250	6,370	6- 2-85	174.000	61,959	22- 4-85	174.500	18,706
11- 9-84	181.000	50,128	23-11-84	162.250	12,312	7- 2-85	173.500	73,225	23- 4-85	175.500	22,289
12- 9-84	181.000	25,590	26-11-84	163.000	7,655	8- 2-85	173.000	33,739	24- 4-85	174.000	28,235
13- 9-84	181.000	25,589	27-11-84	161.000	8,302	11- 2-85	175.000	29,739	25- 4-85	174.000	30,018
14- 9-84	176.000	63,169	28-11-84	162.500	11,549	12- 2-85	176.500	31,282	26- 4-85	169.000	58,739
17- 9-84	179.000	35,489	29-11-84	161.500	18,868	13- 2-85	177.500	29,032	29- 4-85	171.000	6,333
18- 9-84	178.000	32,648	30-11-84	160.000	10,970	14- 2-85	178.000	133,677	30- 4-85	170.000	15,486
19- 9-84	175.000	35,527	3-12-84	158.000	10,994	15- 2-85	177.750	48,280	3- 5-85	166.000	13,039
20- 9-84	173.000	18,400	4-12-84	157.000	9,473	18- 2-85	179.000	43,960	6- 5-85	168.000	11,771
21- 9-84	172.000	48,566	5-12-84	157.000	8,571	19- 2-85	176.000	31,860	7- 5-85	169.000	15,022
24- 9-84	173.000	14,662	6-12-84	156.500	6,018	20- 2-85	178.500	63,589	8- 5-85	166.000	3,533
25- 9-84	172.000	18,504	7-12-84	154.000	19,128	21- 2-85	177.000	53,723	9- 5-85	169.500	22,592
26- 9-84	171.000	10,327	10-12-84	160.000	13,560	22- 2-85	175.000	43,280	10- 5-85	166.500	10,500
27- 9-84	168.500	34,519	11-12-84	156.000	15,239	25- 2-85	180.000	73,080	13- 5-85	16[illegible].000	9,050
28- 9-84	171.000	65,4[illegible]	12-12-84	158.000	15,339	26- 2-85	183.500	90,961	14- 5-85	167.[illegible]	7,065
1-10-84	174.000	51,152	13-12-84	157.000	6,659	27- 2-85	185.500	76,872	16- 5-85	16[illegible].000	8,132

COTIZACIONES DE VALORES
VALLEHERM.O

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	50.000	23,422	2-10-84	60.000	84,944	14-12-84	50.500	61,279	28- 2-85	66.000	70,990
23- 7-84	49.500	24,391	3-10-84	60.000	173,199	17-12-84	52.000	27,695	1- 3-85	67.000	14,263
24- 7-84	47.000	18,142	4-10-84	61.000	61,222	18-12-84	53.000	27,142	4- 3-85	67.000	41,497
26- 7-84	48.000	38,670	5-10-84	59.000	68,767	19-12-84	52.500	27,928	5- 3-85	65.000	24,707
27- 7-84	49.000	26,964	8-10-84	58.750	42,190	20-12-84	53.000	60,898	6- 3-85	65.000	61,686
30 7-84	50.000	43,535	9-10-84	57.500	53,739	21-12-84	52.000	21,365	7- 3-85	65.000	33,586
31- 7-84	50.000	45,161	10-10-84	56.000	37,655	26-12-84	51.500	24,198	8- 3-85	62.000	46,364
1- 8-84	50.000	27,372	11-10-84	56.000	21,508	27-12-84	51.000	34,805	11- 3 85	64.000	40,669
2- 8-84	51.750	35,908	15-10-84	55.500	56,043	28-12-84	52.000	41,721	12- 3-85	64.500	31,321
3- 8-84	53.000	24,320	16-10-84	58.000	26,813	2- 1-85	54.000	49,923	13- 3-85	64.250	27,551
6- 8-84	55.000	19,280	17-10-84	58.000	27,501	3- 1-85	56.500	53,706	14- 3-85	62.500	27,800
7- 8-84	56.000	28,634	18-10-84	57.000	16,231	4- 1-85	56.000	85,308	15- 3-85	61.250	49,357
8- 8-84	54.500	18,421	19-10-84	56.000	18,645	7- 1-85	57.500	36,609	18- 3-85	63.000	19,877
9- 8-84	53.500	18,281	22-10-84	55.000	27,825	8- 1-85	57.000	190,159	20- 3-85	61.750	30,685
10- 8-84	53.000	18,594	23-10-84	54.000	29,898	9- 1-85	57.500	34,869	21- 3-85	60.500	29,858
13- 8-84	52.000	10,499	24-10-84	57.000	18,460	10- 1-85	59.250	57,973	22- 3-85	60.750	10,873
14- 8-84	52.000	24,332	25-10-84	55.500	26,179	11- 1-85	60.000	63,320	25- 3-85	62.000	12,306
16- 8-84	54.500	0	26-10-84	56.000	42,112	14- 1-85	59.000	67,565	26- 3-85	62.750	16,100
17- 8-84	57.500	54,477	29-10-84	54.500	19,733	15- 1-85	60.000	58,788	27- 3-85	63.000	26,736
20- 8-84	61.000	58,047	30-10-84	54.500	7,802	16- 1-85	59.000	69,260	28- 3-85	63.000	38,976
21- 8-84	64.500	96,850	31-10-84	54.000	15,717	17- 1-85	58.000	76,873	29- 3-85	63.000	56,497
22- 8-84	61.000	89,317	2-11-84	53.500	18,263	18- 1-85	58.500	23,140	1- 4-85	63.000	8,564
23- 8-84	59.000	66,140	5-11-84	53.000	25,720	21- 1-85	58.500	53,001	2- 4-85	64.000	18,800
24- 8-84	60.500	62,455	6-11-84	53.000	17,902	22- 1-85	57.000	42,685	3- 4-85	63.500	8,226
27- 8-84	60.000	25,632	7-11-84	51.000	15,566	23- 1-85	58.000	53,156	8- 4-85	63.500	7,094
28- 8-84	60.000	25,154	8-11-84	49.000	110,904	24- 1-85	56.500	13,843	9- 4-85	63.500	4,774
29- 8-84	61.000	15,680	12-11-84	48.500	83,127	25- 1-85	57.500	24,270	10- 4-85	62.000	10,913
30- 8-84	61.500	25,607	13-11-84	50.000	18,242	28- 1-85	58.000	62,074	11- 4-85	60.500	15,501
31- 8-84	60.000	29,090	14-11-84	48.000	25,780	29- 1-85	58.000	33,365	12- 4-85	60.000	11,560
3- 9-84	60.000	14,866	15-11-84	48.000	14,050	30- 1-85	58.000	16,468	15- 4-85	59.000	9,933
4- 9-84	62.000	16,156	16-11-84	49.500	19,856	31- 1-85	58.000	170,370	16- 4-85	58.000	17,179
5- 9-84	63.000	25,259	19-11-84	50.000	46,767	1- 2-85	59.000	82,869	17- 4-85	61.000	0
6- 9-84	61.000	29,381	20-11-84	52.500	13,413	4- 2-85	59.000	84,148	18- 4-85	63.750	37,726
7- 9-84	62.000	29,537	21-11-84	53.500	25,715	5- 2-85	58.000	62,108	19- 4-85	64.000	50,604
10- 9-84	64.000	39,661	22-11-84	51.000	12,676	6- 2-85	59.500	229,664	22- 4-85	63.000	42,413
11- 9-84	66.000	153,565	23-11-84	52.000	47,735	7- 2-85	59.750	74,548	23- 4-85	62.500	25,371
12- 9-84	66.000	67,973	26-11-84	52.000	36,862	8- 2-85	60.000	86,867	24- 4-85	63.750	13,700
13- 9-84	67.000	79,277	27-11-84	54.500	60,513	11- 2-85	62.500	96,599	25- 4-85	63.000	14,173
14- 9-84	68.000	231,197	28-11-84	53.000	176,430	12- 2-85	65.500	95,505	26- 4-85	60.000	46,479
17- 9-84	68.000	29,323	29-11-84	56.000	55,714	13- 2-85	66.500	167,202	29- 4-85	62.000	25,261
18- 9-84	70.000	117,377	30-11-84	55.000	34,900	14- 2-85	67.500	103,179	30- 4-85	63.000	20,007
19- 9-84	66.500	36,738	3-12-84	54.000	15,287	15- 2-85	66.500	77,847	3- 5-85	63.000	19,863
20- 9-84	69.000	62,091	4-12-84	52.000	26,558	18- 2-85	67.000	36,335	6- 5-85	63.000	13,879
21- 9-84	68.000	21,400	5-12-84	52.000	9,554	19- 2-85	66.500	48,066	7- 5-85	63.000	0
24- 9-84	67.500	25,713	6-12-84	52.000	35,799	20- 2-85	65.500	34,097	8- 5-85	62.500	15,248
25- 9-84	68.000	44,360	7-12-84	50.000	32,350	21- 2-85	64.500	23,335	9- 5-85	62.000	13,951
26- 9-84	68.250	46,182	10-12-84	52.000	35,145	22- 2-85	64.500	41,779	10- 5-85	62.500	5,890
27- 9-84	67.250	45,348	11-12-84	51.000	48,960	25- 2-85	65.000	28,634	13- 5-85	62.500	7,150
28- 9-84	66.500	59,415	12-12-84	52.500	37,475	26- 2-85	65.500	38,406	14- 5-85	63.000	12,750
1-10-84	63.000	62,347	13-12-84	52.000	24,187	27- 2-85	65.000	94,521	16- 5-85	61.000	21,456

COTIZACIONES DE VALORES
HUARTE

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	118.000	0	2-10-84	142.000	31,200	14-12-84	128.000	18,750	28- 2-85	126.000	6,427
23- 7-84	117.000	0	3-10-84	138.000	17,547	17-12-84	128.000	3,150	1- 3-85	126.000	3,930
24- 7-84	116.000	15,565	4-10-84	138.000	22,044	18-12-84	127.000	8,160	4- 3-85	128.000	9,400
26- 7-84	115.000	0	5-10-84	132.000	17,449	19-12-84	126.000	9,060	5- 3-85	127.000	4,736
27- 7-84	114.000	11,683	8-10-84	131.000	20,167	20-12-84	126.000	9,625	6- 3-85	126.000	6,876
30- 7-84	113.000	9,613	9-10-84	131.000	5,773	21-12-84	125.500	16,361	7- 3-85	126.000	0
31- 7-84	113.000	8,973	10-10-84	129.000	13,695	26-12-84	126.000	5,569	8- 3-85	122.000	19,155
1- 8-84	113.000	6,090	11-10-84	129.000	5,632	27-12-84	126.000	4,100	11- 3-85	122.000	0
2- 8-84	113.000	0	15-10-84	130.000	0	28-12-84	128.000	23,025	12- 3-85	120.000	6,616
3- 8-84	118.000	3,554	16-10-84	133.000	17,722	2- 1-85	129.000	3,416	13- 3-85	117.000	17,062
6- 8-84	122.000	8,881	17-10-84	134.000	21,840	3- 1-85	130.000	11,970	14- 3-85	116.000	4,350
7 8-84	123.000	6,680	18-10-84	132.000	10,494	4- 1-85	134.000	13,128	15- 3-85	116.000	12,179
8- 8-84	123.000	5,690	19-10-84	130.000	12,800	7- 1-85	136.000	12,200	18- 3-85	118.000	11,593
9- 8-84	121.000	3,550	22 10-84	130.000	18,364	8- 1-85	134.000	14,260	20- 3-85	118.000	0
10- 8-84	119.000	14,539	23-10-84	135.000	14,155	9- 1-85	136.000	14,310	21- 3-85	118.500	10,250
13- 8-84	115.000	3,225	24-10-84	135.000	51,150	10- 1-85	136.000	10,850	22- 3-85	118.500	0
14- 8-84	112.000	7,532	25-10-84	137.000	50,722	11- 1-85	138.000	9,400	25- 3-85	120.500	13,211
16- 8-84	114.000	7,265	26-10-84	136.000	70,610	14- 1-85	137.000	5,382	26- 3-85	121.000	3,100
17- 8-84	117.000	15,510	29-10-84	133.000	39,169	15- 1-85	140.000	24,600	27- 3-85	121.000	0
20- 8-84	118.000	6,825	30-10-84	133.000	17,600	16- 1-85	140.000	21,105	28- 3-85	121.000	5,441
21- 8-84	120.000	11,965	31-10-84	133.000	24,578	17- 1-85	142.000	24,795	29- 3-85	121.000	0
22- 8-84	120.000	15,050	2-11-84	138.000	39,852	18- 1-85	142.000	12,240	1- 4-85	121.000	0
23- 8-84	124.000	10,010	5-11-84	143.000	51,881	21- 1-85	140.000	13,144	2- 4-85	121.000	11,366
24- 8-84	121.000	9,397	6-11-84	139.000	31,371	22- 1-85	138.000	15,340	3- 4-85	121.000	0
27- 8-84	121.000	6,996	7-11-84	137.000	29,095	23- 1-85	136.000	7,860	8- 4-85	121.000	0
28- 8-84	121.000	7,360	8-11-84	134.000	37,596	24- 1-85	135.000	7,060	9- 4-85	121.000	0
29- 8-84	120.000	9,875	12-11-84	133.000	15,076	25- 1-85	140.000	25,035	10- 4-85	121.000	16,297
30- 8-84	121.000	12,664	13-11-84	130.000	17,511	28- 1-85	139.000	4,430	11- 4-85	121.000	0
31- 8-84	121.000	6,369	14-11-84	129.000	15,025	29- 1-85	139.000	9,038	12- 4-85	120.250	598
3- 9-84	121.000	1,240	15-11-84	128.000	9,995	30- 1-85	138.000	4,350	15- 4-85	118.000	7,945
4- 9-84	123.000	8,256	16-11-84	126.000	15,955	31- 1-85	138.000	8,490	16- 4-85	115.000	7,100
5- 9-84	128.000	11,289	19-11-84	124.000	15,256	1- 2-85	138.000	14,100	17- 4-85	111.000	8,550
6- 9-84	127.000	6,000	20-11-84	120.000	13,840	4- 2-85	140.000	25,360	18- 4-85	111.000	8,500
7- 9-84	130.000	10,570	21-11-84	118.000	10,724	5- 2-85	140.000	27,844	19- 4-85	114.000	5,590
10- 9-84	132.500	11,910	22-11-84	115.000	4,850	6- 2-85	140.000	31,509	22- 4-85	117.000	0
11- 9-84	137.000	35,230	23-11-84	118.000	24,583	7- 2-85	139.000	22,766	23- 4-85	118.000	0
12- 9-84	140.000	26,685	26-11-84	124.000	46,060	8- 2-85	139.000	10,075	24- 4-85	122.000	8,100
13- 9-84	137.000	17,532	27-11-84	130.000	74,730	11- 2-85	139.000	9,310	25- 4-85	120.500	3,380
14- 9-84	134.000	17,569	28-11-84	135.000	98,704	12- 2-85	140.000	22,300	26- 4-85	120.500	2,500
17- 9-84	136.000	12,177	29-11-84	132.000	39,348	13- 2-85	140.000	8,410	29- 4-85	120.000	4,788
18- 9-84	138.000	9,818	30-11-84	131.000	27,988	14- 2-85	139.000	4,640	30- 4-85	118.000	3,890
19- 9-84	133.500	26,736	3-12-84	128.000	18,666	15- 2-85	138.500	10,340	3- 5-85	115.000	1,528
20- 9-84	133.500	10,223	4-12-84	128.000	18,530	18- 2-85	138.000	12,710	6- 5-85	117.000	0
21- 9-84	135.000	17,640	5-12-84	130.000	11,720	19- 2-85	138.000	6,330	7- 5-85	118.000	6,177
24- 9-84	134.000	9,100	6-12-84	128.000	10,890	20- 2-85	136.000	15,065	8- 5-85	118.000	0
25- 9-84	135.000	17,256	7-12-84	128.000	15,946	21- 2-85	135.000	6,110	9- 5-85	115.000	5,868
26- 9-84	133.000	19,248	10-12-84	127.000	14,310	22- 2-85	132.000	4,700	10- 5-85	112.000	9,695
27- 9-84	134.000	17,072	11-12-84	128.000	6,560	25- 2-85	130.000	6,669	13- 5-85	115.000	8,137
28- 9-84	135.000	21,500	12-12-84	129.000	5,904	26- 2-85	128.000	4,700	14- 5-85	115.000	3,935
1-10-84	140.000	15,360	13-12-84	129.000	3,505	27- 2-85	130.000	8,521	16- 5-85	113.000	3,710

COTIZACIONES DE VALORES
GRAL. INVER.

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	106.000	0	2-10-84	136.000	1,932	14-12-84	115.000	1,102	28- 2-85	118.000	5,863
23- 7-84	108.000	2,173	3-10-84	136.000	1,213	17-12-84	116.000	1,405	1- 3-85	118.000	5,080
24- 7-84	111.000	2,129	4-10-84	136.000	1,000	18-12-84	117.000	7,633	4- 3-85	118.000	3,643
26- 7-84	114.000	0	5-10-84	138.000	3,567	19-12-84	117.000	2,106	5- 3-85	118.000	6,502
27- 7-84	117.000	0	8-10-84	139.000	3,232	20-12-84	117.000	0	6- 3-85	118.000	1,347
30- 7-84	120.000	0	9-10-84	139.000	3,191	21-12-84	116.000	2,350	7- 3-85	120.000	5,287
31- 7-84	122.000	5,877	10-10-84	139.000	0	26-12-84	111.000	8,275	8- 3-85	120.000	4,172
1- 8-84	124.000	2,229	11-10-84	139.000	0	27-12-84	115.000	11,294	11- 3-85	118.000	4,178
2- 8-84	126.000	5,262	15-10-84	137.000	3,871	28-12-84	115.000	5,651	12- 3-85	118.000	5,725
3- 8-84	128.000	7,915	16-10-84	137.000	0	2- 1-85	115.000	3,045	13- 3-85	118.000	0
6- 8-84	130.000	2,564	17-10-84	134.000	1,346	3- 1-85	115.000	1,003	14- 3-85	115.000	10,113
7- 8-84	133.000	8,929	18-10-84	134.000	0	4- 1-85	117.000	3,550	15- 3-85	116.000	3,947
8- 8-84	134.000	1,869	19-10-84	134.000	0	7- 1-85	115.000	5,787	18- 3-85	116.000	2,760
9- 8-84	134.000	0	22-10-84	131.000	0	8- 1-85	116.000	6,510	20- 3-85	116.000	4,500
10- 8-84	132.000	2,154	23-10-84	128.000	0	9- 1-85	116.000	4,120	21- 3-85	116.000	5,300
13- 8-84	130.000	2,600	24-10-84	125.000	10,418	10- 1-85	116.000	2,526	22- 3-85	115.000	3,925
14- 8-84	128.000	0	25-10-84	125.000	0	11- 1-85	117.000	15,454	25- 3-85	117.000	1,010
16- 8-84	126.000	0	26-10-84	129.000	2,820	14- 1-85	118.000	7,450	26- 3-85	115.000	2,322
17- 8-84	124.000	7,120	29-10-84	129.000	520	15- 1-85	118.000	9,748	27- 3-85	113.000	5,610
20- 8-84	127.000	0	30-10-84	129.000	0	16- 1-85	118.000	7,572	28- 3-85	113.000	8,089
21- 8-84	130.000	0	31-10-84	124.000	6,910	17- 1-85	118.000	7,723	29- 3-85	111.000	34,794
22- 8-84	132.000	6,911	2-11-84	124.000	800	18- 1-85	118.000	2,100	1- 4-85	116.000	1,625
23- 8-84	134.000	4,497	5-11-84	124.000	1,900	21- 1-85	118.000	9,065	2- 4-85	116.000	8,836
24- 8-84	134.000	0	6-11-84	121.000	2,263	22- 1-85	118.000	6,358	3- 4-85	117.000	6,053
27- 8-84	134.000	2,828	7-11-84	121.000	0	23- 1-85	118.000	8,631	8- 4-85	117.000	3,206
28- 8-84	132.000	0	8-11-84	119.000	5,250	24- 1-85	118.000	0	9- 4-85	118.000	5,875
29- 8-84	130.000	0	12-11-84	119.000	4,495	25- 1-85	117.000	2,380	10- 4-85	117.000	3,862
30- 8-84	130.000	2,100	13-11-84	117.000	2,630	28- 1-85	118.250	4,133	11- 4-85	117.000	5,165
31- 8-84	130.000	0	14-11-84	117.000	0	29- 1-85	120.500	8,220	12- 4-85	116.000	3,807
3- 9-84	130.000	0	15-11-84	117.000	1,456	30- 1-85	121.500	5,537	15- 4-85	116.000	5,072
4- 9-84	132.000	898	16-11-84	117.000	5,350	31- 1-85	123.000	6,130	16- 4-85	116.000	4,567
5- 9-84	132.000	0	19-11-84	117.000	3,927	1- 2-85	123.000	4,977	17- 4-85	118.000	3,000
6- 9-84	134.000	810	20-11-84	117.000	6,847	4- 2-85	125.000	16,774	18- 4-85	118.000	3,512
7- 9-84	135.000	3,715	21-11-84	117.000	2,470	5- 2-85	126.000	7,935	19- 4-85	118.000	0
10- 9-84	137.000	6,960	22-11-84	117.000	2,401	6- 2-85	126.000	2,795	22- 4-85	118.000	4,686
11- 9-84	139.000	6,146	23-11-84	118.000	0	7- 2-85	125.000	5,177	23- 4-85	118.000	0
12- 9-84	140.000	4,864	26-11-84	120.000	0	8- 2-85	122.000	11,860	24- 4-85	117.000	1,874
13- 9-84	140.000	0	27-11-84	123.000	5,998	11- 2-85	120.000	4,740	25- 4-85	117.000	637
14- 9-84	139.000	3,488	28-11-84	122.000	558	12- 2-85	118.000	12,382	26- 4-85	117.000	1,521
17- 9-84	139.000	2,534	29-11-84	122.000	0	13- 2-85	120.000	7,059	29- 4-85	117.000	1,898
18- 9-84	139.000	1,118	30-11-84	122.000	0	14- 2-85	121.000	5,585	30- 4-85	120.000	2,997
19- 9-84	139.000	1,130	3-12-84	122.000	0	15- 2-85	126.000	8,739	3- 5-85	120.000	2,840
20- 9-84	139.000	1,921	4-12-84	117.000	4,482	18- 2-85	124.000	4,969	6- 5-85	123.000	6,484
21- 9-84	139.000	0	5-12-84	115.000	3,404	19- 2-85	124.000	0	7- 5-85	125.000	4,383
24- 9-84	139.500	2,377	6-12-84	115.000	1,047	20- 2-85	124.000	0	8- 5-85	127.000	3,681
25- 9-84	139.500	0	7-12-84	115.000	3,000	21- 2-85	120.000	4,772	9- 5-85	127.000	3,025
26- 9-84	138.000	0	10-12-84	115.000	4,000	22- 2-85	120.000	1,983	10- 5-85	127.000	0
27- 9-84	136.000	0	11-12-84	115.000	3,791	25- 2-85	120.000	3,095	13- 5-85	125.000	2,040
28- 9-84	134.000	7,309	12-12-84	115.000	0	26- 2-85	118.000	2,400	14- 5-85	123.000	2,174
1-10-84	136.000	4,078	13-12-84	114.000	3,530	27- 2-85	116.000	4,365	16- 5-85	121.000	1,700

COTIZACIONES DE VALORES
POPULINSA A

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	320.000	1,275	2-10-84	386.000	0	14-12-84	386.000	1,024	28- 2-85	398.000	483
23- 7-84	321.000	685	3-10-84	390.000	0	17-12-84	386.000	4,248	1- 3-85	398.000	229
24- 7-84	322.000	944	4-10-84	394.000	0	18-12-84	391.000	2,406	4- 3-85	398.000	1,234
26- 7-84	323.000	200	5-10-84	397.000	5,669	19-12-84	393.000	200	5- 3-85	395.000	1,173
27- 7-84	325.000	2,043	8-10-84	399.000	0	20-12-84	391.000	1,306	6- 3-85	391.000	1,248
30- 7-84	326.000	0	9-10-84	401.000	1,906	21-12-84	390.000	400	7- 3-85	389.000	598
31- 7-84	328.000	1,186	10-10-84	403.000	0	26-12-84	395.000	1,202	8- 3-85	389.000	115
1 8-84	328.000	0	11-10-84	405.000	3,034	27-12-84	397.000	1,543	11- 3-85	385.000	1,854
2- 8-84	331.000	313	15-10-84	408.000	966	28-12-84	396.000	795	12- 3-85	385.000	90
3- 8-84	333.000	344	16-10-84	410.000	0	2- 1-85	396.000	1,438	13- 3-85	382.000	843
6- 8-84	334.000	280	17-10-84	412.000	0	3- 1-85	398.000	1,078	14- 3-85	382.000	100
7- 8-84	336.000	3,573	18-10-84	414.000	0	4- 1-85	400.000	262	15- 3-85	382.000	1,352
8- 8-84	337.000	600	19-10-84	415.000	3,824	7- 1-85	392.000	3,784	18- 3-85	382.000	343
9- 8-84	338.000	0	22-10-84	410.000	3,101	8- 1-85	393.000	294	20- 3-85	378.000	858
10- 8-84	339.000	0	23-10-84	405.000	2,010	9- 1-85	393.000	743	21- 3-85	373.000	803
13- 8-84	340.000	949	24-10-84	408.000	1,712	10- 1-85	393.000	0	22- 3-85	373.000	2,039
14- 8-84	341.000	399	25-10-84	409.000	420	11- 1-85	398.000	707	25- 3-85	373.000	1,434
16- 8-84	342.000	426	26-10-84	410.000	0	14- 1-85	398.000	4,220	26- 3-85	373.000	1,903
17- 8-84	344.000	0	29-10-84	410.000	3,049	15- 1-85	402.000	1,322	27- 3-85	373.000	496
20- 8-84	347.000	1,196	30-10-84	410.000	0	16- 1-85	402.000	1,204	28- 3-85	375.000	770
21- 8-84	349.000	244	31-10-84	411.000	1,520	17- 1-85	402.000	932	29- 3-85	377.000	748
22- 8-84	351.000	0	2-11-84	412.000	673	18- 1-85	402.000	1,125	1- 4-85	377.000	252
23- 8-84	351.000	360	5-11-84	412.000	546	21- 1-85	398.000	1,323	2- 4-85	376.000	545
24- 8-84	351.000	288	6-11-84	410.000	1,627	22- 1-85	396.000	441	3- 4-85	375.000	200
27- 8-84	349.000	1,066	7-11-84	407.000	2,116	23- 1-85	396.000	597	8- 4-85	373.000	482
28- 8-84	347.000	2,978	8-11-84	402.000	787	24- 1-85	398.000	1,848	9- 4-85	372.000	890
29- 8-84	345.000	808	12-11-84	402.000	1,165	25- 1-85	400.000	1,786	10- 4-85	370.000	1,168
30- 8-84	345.000	1,671	13-11-84	396.000	4,163	28- 1-85	403.000	1,470	11- 4-85	367.000	200
31- 8-84	345.000	1,224	14-11-84	394.000	1,446	29- 1-85	406.000	1,286	12- 4-85	365.000	534
3- 9-84	343.000	200	15-11-84	396.000	850	30- 1-85	406.000	1,419	15- 4-85	363.000	405
4- 9-84	345.000	0	16-11-84	398.000	826	31- 1-85	403.000	1,049	16- 4-85	360.000	1,365
5- 9-84	347.000	889	19-11-84	401.000	572	1- 2-85	405.000	265	17- 4-85	356.000	2,312
6- 9-84	349.000	0	20-11-84	403.000	350	4- 2-85	405.000	1,071	18- 4-85	352.000	978
7- 9-84	352.000	0	21-11-84	404.000	753	5- 2-85	401.000	598	19- 4-85	348.000	1,408
10- 9-84	354.000	0	22-11-84	401.000	243	6- 2-85	397.000	427	22- 4-85	340.000	5,474
11- 9-84	357.000	2,764	23-11-84	400.000	755	7- 2-85	390.000	473	23- 4-85	342.000	1,782
12- 9-84	35[illegible].000	0	26-11-84	400.000	466	8- 2-85	385.000	1,540	24- 4-85	345.[illegible]	2,485
13- 9-84	360.000	4,200	27-11-84	395.000	769	11- 2-85	390.000	436	25- 4-85	347.000	1,701
14- 9-84	362.000	0	28-11-84	398.000	2,372	12- 2-85	393.000	630	26- 4-85	348.000	200
17- 9-84	365.000	0	29-11-84	400.000	1,999	13- 2-85	[illegible]5.000	935	29- 4-85	346.000	1,206
18- 9-84	367.000	3,474	30-11-84	402.000	1,000	14- 2-85	395.000	2,228	30- 4-85	345.000	630
19- 9-84	369.000	0	3-12-84	397.000	200	15- 2-85	397.000	1,445	3- 5-85	344.000	1,172
20- 9-84	371.000	0	4-12-84	397.000	0	18- 2-85	399.000	1,811	6- 5-85	344.000	602
21- 9-84	374.000	0	5-12-84	397.000	0	19- 2-85	399.000	661	7- 5-85	343.000	989
24- 9-84	375.000	1,722	6-12-84	388.000	2,996	20- 2-85	399.000	291	8- 5-85	343.000	390
25- 9-84	377.000	1,251	7-12-84	385.000	1,364	21- 2-85	401.000	2,850	9- 5-85	343.000	281
26- 9-84	377.000	3,055	10-12-84	388.000	740	22- 2-85	403.000	1,747	10- 5-85	343.000	585
27- 9-84	378.000	1,222	11-12-84	388.000	1,156	25- 2-85	401.000	1,457	13- 5-85	343.000	166
28- 9-84	379.000	1,453	12-12-84	384.000	1,192	26- 2-85	395.000	1,222	14- 5-85	343.000	689
1-10-84	382.000	0	13-12-84	386.000	550	27- 2-85	398.000	1,427	16- 5-85	343.000	1,225

COTIZACIONES DE VALORES
ESP. INVERS.

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	120.000	16,182	2-10-84	140.000	10,586	14-12-84	120.000	2,633	28- 2-85	136.000	102,790
23- 7-84	123.000	3,194	3-10-84	139.000	10,715	17-12-84	120.000	2,072	1- 3-85	136.000	3,539
24- 7-84	124.500	6,610	4-10-84	136.000	178,464	18-12-84	120.000	17,019	4- 3-85	139.000	3,474
26- 7-84	129.000	8,458	5-10-84	131.000	10,430	19-12-84	120.000	2,501	5- 3-85	137.000	2,180
27- 7-84	135.000	10,316	8-10-84	132.000	16,121	20-12-84	120.000	2,035	6- 3-85	137.000	1,770
30- 7-84	135.000	8,680	9-10-84	133.000	5,270	21-12-84	120.000	0	7- 3-85	134.000	4,281
31- 7-84	135.000	0	10-10-84	131.000	6,677	26-12-84	125.000	14,213	8- 3-85	134.000	916
1- 8-84	135.000	4,791	11-10-84	130.000	2,883	27-12-84	130.000	18,324	11- 3-85	134.000	9,689
2- 8-84	135.000	0	15-10-84	133.000	3,365	28-12-84	136.000	214,921	12- 3-85	130.000	10,608
3- 8-84	130.000	12,834	16-10-84	133.000	4,265	2- 1-85	136.000	2,653	13- 3-85	130.000	5,576
6- 8-84	135.000	9,772	17-10-84	132.000	5,129	3- 1-85	136.000	5,152	14- 3-85	125.000	67,490
7- 8-84	134.000	6,479	18-10-84	132.000	4,671	4- 1-85	136.000	1,375	15- 3-85	125.000	3,752
8- 8-84	133.000	1,885	19-10-84	136.000	157,360	7- 1-85	132.000	8,557	18- 3-85	125.000	6,670
9- 8-84	133.000	5,368	22-10-84	136.000	0	8- 1-85	132.000	28,000	20- 3-85	123.000	8,671
10- 8-84	133.000	0	23-10-84	133.000	0	9- 1-85	132.000	4,633	21- 3-85	126.000	5,334
13- 8-84	133.000	0	24-10-84	130.000	17,058	10- 1-85	135.000	2,880	22- 3-85	126.000	5,552
14- 8-84	133.000	0	25-10-84	130.000	0	11- 1-85	136.000	9,800	25- 3-85	127.000	5,873
16- 8-84	133.000	11,341	26-10-84	130.000	6,582	14- 1-85	137.000	2,400	26- 3-85	125.000	23,335
17- 8-84	140.000	14,220	29-10-84	130.000	0	15- 1-85	137.000	55,599	27- 3-85	128.000	2,386
20- 8-84	138.000	6,292	30-10-84	128.000	3,840	16- 1-85	137.000	7,307	28- 3-85	128.000	2,894
21- 8-84	138.000	0	31-10-84	125.000	11,581	17- 1-85	137.000	3,918	29- 3-85	130.000	947
22- 8-84	135.000	3,112	2-11-84	130.000	4,032	18- 1-85	137.000	3,924	1- 4-85	130.000	2,000
23- 8-84	135.000	2,000	5-11-84	130.000	0	21- 1-85	134.000	3,416	2- 4-85	130.000	3,079
24- 8-84	135.000	4,250	6-11-84	127.000	6,593	22- 1-85	134.000	1,060	3- 4-85	130.000	1,319
27- 8-84	135.000	0	7-11-84	125.000	1,124	23- 1-85	136.000	2,746	8- 4-85	130.000	2,508
28- 8-84	133.000	0	8-11-84	125.000	0	24- 1-85	136.000	2,161	9- 4-85	130.000	2,561
29- 8-84	133.000	7,846	12-11-84	125.000	3,657	25- 1-85	136.000	2,546	10- 4-85	130.000	4,357
30- 8-84	133.000	4,075	13-11-84	125.000	0	28- 1-85	138.000	54,840	11- 4-85	130.000	3,568
31- 8-84	132.000	1,451	14-11-84	125.000	0	29- 1-85	138.000	0	12- 4-85	130.000	2,692
3- 9-84	130.000	826	15-11-84	120.000	9,405	30- 1-85	137.000	6,016	15- 4-85	129.000	4,621
4- 9-84	130.000	1,921	16-11-84	126.000	1,512	31- 1-85	137.000	14,319	16- 4-85	130.000	3,617
5- 9-84	135.000	9,312	19-11-84	126.000	2,400	1- 2-85	137.000	14,641	17- 4-85	132.000	4,291
6- 9-84	135.000	4,553	20-11-84	126.000	2,899	4- 2-85	137.000	50,770	18- 4-85	135.000	2,541
7- 9-84	135.000	105,664	21-11-84	126.000	0	5- 2-85	137.000	31,909	19- 4-85	134.000	4,281
10- 9-84	136.000	7,475	22-11-84	126.000	2,859	6- 2-85	137.000	36,904	22- 4-85	134.000	4,361
11- 9-84	140.000	9,473	23-11-84	126.000	3,077	7- 2-85	137.000	105,061	23- 4-85	134.000	3,555
12- 9-84	140.000	20,588	26-11-84	124.000	3,131	8- 2-85	137.000	5,314	24- 4-85	132.000	4,460
13- 9-84	140.000	13,580	27-11-84	124.000	0	11- 2-85	135.000	7,616	25- 4-85	132.000	2,285
14- 9-84	140.000	5,688	28-11-84	122.000	3,360	12- 2-85	135.000	3,247	26- 4-85	132.000	4,116
17- 9-84	142.000	14,356	29-11-84	120.000	2,087	13- 2-85	135.000	7,615	29- 4-85	132.000	2,424
18- 9-84	145.000	6,511	30-11-84	118.000	7,008	14- 2-85	138.000	2,572	30- 4-85	134.000	3,181
19- 9-84	145.000	0	3-12-84	121.000	7,757	15- 2-85	138.000	1,528	3- 5-85	138.000	1,426
20- 9-84	142.000	5,520	4-12-84	121.000	1,140	18- 2-85	138.000	3,315	6- 5-85	140.000	8,074
21- 9-84	140.000	11,344	5-12-84	125.000	5,187	19- 2-85	139.000	5,561	7- 5-85	140.000	8,210
24- 9-84	141.000	1,957	6-12-84	125.000	0	20- 2-85	136.000	8,739	8- 5-85	140.000	7,704
25- 9-84	141.000	0	7-12-84	125.000	0	21- 2-85	136.000	924	9- 5-85	141.000	7,531
26- 9-84	140.000	5,460	10-12-84	120.000	10,782	22- 2-85	136.000	393	10- 5-85	142.000	10,184
27- 9-84	138.000	7,760	11-12-84	120.000	3,081	25- 2-85	136.000	4,222	13- 5-85	142.000	5,140
28- 9-84	142.000	6,284	12-12-84	120.000	3,885	26- 2-85	136.000	3,7[illegible]	14- 5-85	142.000	1,462
1-10-84	142.000	11,917	13-12-84	120.000	3,185	27- 2-85	136.000	1,212	16- 5-85	146.000	13,432

COTIZACIONES DI VALORES
SARRIO PAP.

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	54.250	3,250	2-10-84	73.000	12,402	14-12-84	60.500	11,394	28- 2-85	68.000	7,529
23- 7-84	54.000	4,963	3-10-84	73.000	9,217	17-12-84	60.500	4,639	1- 3-85	67.250	3,583
24- 7-84	53.500	7,617	4-10-84	72.500	13,611	18-12-84	62.500	7,630	4- 3-85	67.500	5,000
26- 7-84	54.000	20,720	5-10-84	73.000	19,090	19-12-84	64.000	13,313	5- 3-85	67.000	4,100
27- 7-84	54.250	3,836	8-10-84	72.500	15,086	20-12-84	64.000	12,274	6- 3-85	65.500	2,242
30- 7-84	55.000	0	9-10-84	71.000	23,049	21-12-84	64.000	16,896	7- 3-85	65.500	0
31- 7-84	56.000	8,089	10-10-84	68.500	13,923	26-12-84	64.000	10,934	8- 3-85	64.000	19,164
1- 8-84	56.250	6,835	11-10-84	67.000	16,716	27-12-84	63.750	26,081	11- 3-85	65.000	4,010
2- 8-84	56.500	8,409	15-10-84	70.500	10,346	28-12-84	63.000	12,191	12- 3-85	65.000	12,300
3- 8-84	57.000	11,440	16-10-84	71.500	9,019	2- 1-85	66.000	17,512	13- 3-85	64.000	9,700
6- 8-84	59.000	10,944	17-10-84	71.500	0	3- 1-85	70.000	9,106	14- 3-85	62.000	11,459
7- 8-84	58.000	15,985	18-10-84	70.000	0	4- 1-85	73.500	28,802	15- 3-85	63.250	16,430
8- 8-84	57.500	4,900	19-10-84	70.000	0	7- 1-85	73.000	22,727	18- 3-85	64.500	4,739
9- 8-84	57.000	15,8[illegible]	[illegible]-10-84	70.000	0	8- 1-85	72.000	17,959	20- 3-85	64.000	7,216
10- 8-84	57.000	11,830	23-10-84	70.000	22,380	9- 1-85	71.000	14,330	21- 3-85	64.000	4,100
13- 8-84	56.000	11,494	24-10-84	70.000	0	10- 1-85	73.000	15,494	22- 3-85	63.500	5,800
14- 8-84	55.000	29,267	25-10-84	68.000	7,776	11- 1-85	74.000	78,526	25- 3-85	63.750	2,860
16- 8-84	58.000	16,623	26-10-84	68.500	12,800	14- 1-85	74.000	12,919	26- 3-85	63.750	3,808
17- 8-84	60.000	21,832	29-10-84	70.000	6,381	15- 1-85	74.000	15,950	27- 3-85	63.000	4,945
20- 8-84	61.500	14,240	30-10-84	67.000	4,500	16- 1-85	73.000	11,738	28- 3-85	60.500	7,275
21- 8-84	62.000	9,650	31-10-84	65.000	17,140	17- 1-85	72.500	5,811	29- 3-85	60.000	22,084
22- 8-84	63.750	18,907	2-11-84	67.000	12,264	18- 1-85	71.000	9,560	1- 4-85	61.500	10,060
23- 8-84	63.500	14,235	5-11-84	67.000	2,038	21- 1-85	71.000	17,670	2- 4-85	60.500	9,160
24- 8-84	63.750	10,573	6-11-84	67.000	0	22- 1-85	70.000	12,463	3- 4-85	60.500	10,900
27- 8-84	63.000	16,360	7-11-84	64.500	6,705	23- 1-85	70.000	11,599	8- 4-85	61.000	4,113
28- 8-84	61.500	21,900	8-11-84	61.000	16,849	24- 1-85	71.500	9,319	9- 4-85	62.000	4,420
29- 8-84	62.000	13,079	12-11-84	62.000	11,191	25- 1-85	71.000	13,653	10- 4-85	62.000	9,792
30- 8-84	62.500	22,963	13-11-84	61.000	5,665	28- 1-85	73.000	40,061	11- 4-85	62.000	0
31- 8-84	64.000	32,002	14-11-84	59.500	14,766	29- 1-85	73.000	8,705	12- 4-85	60.000	8,480
3- 9-84	67.000	41,303	15-11-84	60.750	11,460	30- 1-85	70.000	13,498	15- 4-85	60.000	0
4- 9-84	70.000	20,688	16-11-84	63.000	18,321	31- 1-85	70.000	0	16- 4-85	59.000	18,077
5- 9-84	70.000	45,858	19-11-84	65.000	10,723	1- 2-85	69.000	0	17- 4-85	59.000	17,550
6- 9-84	69.500	32,040	20-11-84	64.500	9,852	4- 2-85	67.500	70,491	18- 4-85	59.000	0
7- 9-84	71.500	58,228	21-11-84	65.250	13,081	5- 2-85	67.000	11,201	19- 4-85	57.500	0
10- 9-84	75.000	48,219	22-11-84	65.000	2,691	6- 2-85	69.000	0	22- 4-85	56.500	19,930
11- 9-84	74.000	22,750	23-11-84	67.000	18,700	7- 2-85	68.000	14,532	23- 4-85	56.000	5,780
12- 9-84	74.000	17,644	26-11-84	67.000	6,362	8- 2-85	66.500	31,375	24- 4-85	56.000	0
13- 9-84	72.500	14,240	27-11-84	67.000	58,873	11- 2-85	66.750	31,045	25- 4-85	53.000	9,960
14- 9-84	71.750	25,985	28-11-84	65.500	6,410	12- 2-85	69.000	25,705	26- 4-85	53.000	0
17- 9-84	74.000	16,446	29-11-84	64.500	10,500	13- 2-85	68.000	19,320	29- 4-85	50.000	30,030
18- 9-84	75.000	17,305	30-11-84	64.500	30,072	14- 2-85	67.500	29,428	30- 4-85	52.000	7,885
19- 9-84	73.000	23,186	3-12-84	62.500	8,349	15- 2-85	67.000	12,610	3- 5-85	54.000	0
20- 9-84	74.000	23,964	4-12-84	62.500	0	18- 2-85	68.250	42,742	6- 5-85	56.000	11,787
21- 9-84	74.000	14,110	5-12-84	60.500	8,014	19- 2-85	67.500	9,630	7- 5-85	55.000	11,839
24- 9-84	73.000	8,194	6-12-84	60.000	6,300	20- 2-85	67.750	8,200	8- 5-85	55.750	1,592
25- 9-84	72.000	27,180	7-12-84	60.000	0	21- 2-85	67.750	11,710	9- 5-85	55.000	4,369
26- 9-84	72.000	21,327	10-12-84	63.000	20,660	22- 2-85	66.500	20,027	10- 5-85	55.000	4,500
27- 9-84	72.000	20,607	11-12-84	61.250	7,259	25- 2-85	67.500	8,817	13- 5-85	54.000	4,601
28- 9-84	73.500	33,039	12-12-84	62.000	2,460	26- 2-85	67.250	4,000	14- 5-85	54.500	6,040
1-10-84	73.750	17,400	13-12-84	61.000	10,340	27- 2-85	67.750	8,290	16- 5-85	53.500	4,954

COTIZACIONES DE VALORES
ENERGIAS

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	82.750	13,306	2-10-84	128.000	11,865	14-12-84	119.000	36,941	28- 2-85	136.500	16,664
23- 7-84	82.750	12,383	3-10-84	130.000	37,941	17-12-84	118.500	3,352	1- 3-85	136.000	8,939
24- 7-84	82.750	17,265	4-10-84	129.000	8,843	18-12-84	119.500	30,446	4- 3-85	134.750	12,010
26- 7-84	83.000	38,059	5-10-84	127.000	21,529	19-12-84	126.000	0	5- 3-85	134.000	13,550
27- 7-84	84.000	45,200	8-10-84	130.000	25,180	20-12-84	128.000	99,504	6- 3-85	133.750	5,228
30- 7-84	86.000	0	9-10-84	125.500	18,729	21-12-84	130.000	63,627	7- 3-85	131.500	19,057
31- 7-84	90.000	31,046	10-10-84	120.000	19,044	26-12-84	127.500	53,159	8- 3-85	134.000	11,891
1- 8-84	87.000	5,471	11-10-84	122.000	11,579	27-12-84	128.500	35,326	11- 3-85	133.000	7,023
2- 8-84	88.000	5,586	15-10-84	128.000	16,328	28-12-84	124.500	49,422	12- 3-85	132.000	4,025
3- 8-84	90.000	41,788	16-10-84	124.000	11,364	2- 1-85	130.000	20,960	13- 3-85	130.250	18,045
6- 8-84	90.000	17,627	17-10-84	124.000	15,098	3- 1-85	130.000	76,239	14- 3-85	132.000	2,006
7- 8-84	89.000	5,978	18-10-84	122.750	7,482	4- 1-85	135.000	48,029	15- 3-85	132.000	10,629
8- 8-84	88.000	12,265	19-10-84	116.500	23,564	7- 1-85	136.000	15,939	18- 3-85	132.000	3,550
9- 8-84	89.000	27,610	22-10-84	113.750	47,553	8- 1-85	135.500	37,006	20- 3-85	131.500	2,350
10- 8-84	91.000	34,957	23-10-84	119.000	35,807	9- 1-85	134.500	22,870	21- 3-85	131.000	7,875
13- 8-84	91.500	7,144	24-10-84	120.250	35,744	10- 1-85	136.000	15,454	22- 3-85	130.000	4,786
14- 8-84	93.000	11,094	25-10-84	116.000	29,968	11- 1-85	137.000	31,097	25- 3-85	131.000	12,125
16- 8-84	97.000	0	26-10-84	117.500	35,787	14- 1-85	137.000	46,[illegible]	[illegible]	133.000	10,454
17- 8-84	102.000	0	29-10-84	115.000	14,401	15- 1-85	139.500	18,768	27- 3-85	129.500	35,945
20- 8-84	102.000	32,628	30-10-84	114.750	30,871	16- 1-85	133.000	18,678	28- 3-85	131.000	4,224
21- 8-84	103.500	15,843	31-10-84	114.000	21,598	17- 1-85	135.000	64,977	29- 3-85	140.000	16,556
22- 8-84	102.500	25,376	2-11-84	116.250	56,641	18- 1-85	135.000	17,600	1- 4-85	130.000	1,743
23- 8-84	104.000	25,862	5-11-84	117.750	14,375	21- 1-85	130.000	20,223	2- 4-85	130.000	2,250
24- 8-84	104.500	23,258	6-11-84	114.500	14,739	22- 1-85	126.000	21,295	3- 4-85	131.000	14,464
27- 8-84	104.500	7,412	7-11-84	112.500	28,425	23- 1-85	130.000	32,223	8- 4-85	133.500	3,344
28- 8-84	105.000	32,431	8-11-84	109.500	43,029	24- 1-85	130.000	22,330	9- 4-85	131.500	14,948
29- 8-84	105.000	7,540	12-11-84	114.500	17,734	25- 1-85	132.000	28,894	10- 4-85	130.750	12,655
30- 8-84	105.000	12,519	13-11-84	111.000	15,351	28- 1-85	135.000	33,801	11- 4-85	129.500	6,147
31- 8-84	105.000	104,441	14-11-84	111.250	18,887	29- 1-85	138.120	70,102	12- 4-85	128.250	12,289
3- 9-84	106.000	12,436	15-11-84	113.250	16,909	30- 1-85	133.000	18,931	15- 4-85	128.000	14,746
4- 9-84	110.000	15,016	16-11-84	114.250	49,662	31- 1-85	135.500	28,540	16- 4-85	127.750	12,062
5- 9-84	115.500	0	19-11-84	115.000	12,718	1- 2-85	135.000	30,178	17- 4-85	132.000	24,488
6- 9-84	121.000	91,498	20-11-84	119.000	16,544	4- 2-85	137.000	33,161	18- 4-85	131.500	12,905
7- 9-84	122.000	54,571	21-11-84	118.000	31,598	5- 2-85	133.250	16,451	19- 4-85	130.000	6,419
10- 9-84	120.500	22,609	22-11-84	117.000	21,764	6- 2-85	135.000	38,807	22- 4-85	130.500	14,976
11- 9-84	126.500	37,841	23-11-84	121.000	53,717	7- 2-85	130.500	43,787	23- 4-85	129.250	11,005
12- 9-84	132.000	35,781	26-11-84	120.250	35,578	8- 2-85	132.000	13,800	24- 4-85	128.500	8,967
13- 9-84	127.500	32,460	27-11-84	119.750	26,761	11- 2-85	133.000	15,605	25- 4-85	127.250	39,130
14- 9-84	125.500	52,728	28-11-84	120.000	10,384	12- 2-85	134.500	26,315	26- 4-85	126.500	39,148
17- 9-84	128.000	32,997	29-11-84	119.000	17,471	13- 2-85	134.500	43,276	29- 4-85	124.000	14,136
18- 9-84	129.750	10,559	30-11-84	118.000	14,094	14- 2-85	135.000	16,814	30- 4-85	127.000	26,646
19- 9-84	127.750	15,824	3-12-84	117.000	5,042	15- 2-85	133.000	11,643	3- 5-85	129.500	7,887
20- 9-84	126.500	10,864	4-12-84	117.000	9,409	18- 2-85	134.500	14,542	6- 5-85	131.500	21,969
21- 9-84	125.000	35,505	5-12-84	118.000	25,513	19- 2-85	133.000	15,573	7- 5-85	131.000	9,872
24- 9-84	121.000	21,020	6-12-84	118.500	28,481	20- 2-85	134.250	26,990	8- 5-85	133.000	14,272
25- 9-84	118.000	60,476	7-12-84	114.500	15,817	21- 2-85	134.000	38,166	9- 5-85	136.000	21,951
26- 9-84	119.500	56,225	10-12-84	117.500	18,779	22- 2-85	135.000	28,223	10- 5-85	139.000	26,455
27- 9-84	124.000	39,663	11-12-84	117.500	13,788	25- 2-85	137.000	41,556	13- 5-85	140.000	49,150
28- 9-84	129.500	40,679	12-12-84	117.500	8,101	26- 2-85	137.250	33,341	14- 5-85	140.000	27,954
1-10-84	133.000	37,335	13-12-84	117.000	18,346	27- 2-85	136.500	8,956	16- 5-85	135.000	19,226

COTIZACIONES DE VALORES
E. RIO TINTO

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	27.750	196,795	2-10-84	41.000	86,347	14-12-84	36.000	84,273	28- 2-85	46.250	67,368
23- 7-84	29.620	134,276	3-10-84	40.250	79,145	17-12-84	37.750	104,666	1- 3-85	46.750	17,835
24- 7-84	30.000	187,022	4-10-84	40.250	69,162	18-12-84	38.120	85,396	4- 3-85	46.870	63,682
26- 7-84	32.000	115,932	5-10-84	39.500	108,194	19-12-84	40.000	490,613	5- 3-85	46.370	60,646
27- 7-84	34.000	206,198	8-10-84	39.750	82,660	20-12-84	42.000	249,161	6- 3-85	45.500	52,221
30- 7-84	36.000	185,327	9-10-84	38.500	72,889	21-12-84	40.000	128,425	7- 3-85	45.000	58,735
31- 7-84	38.000	509,238	10-10-84	37.620	81,305	26-12-84	41.000	133,095	8- 3-85	43.870	104,164
1- 8-84	37.250	189,827	11-10-84	36.250	73,223	27-12-84	41.250	87,677	11- 3-85	44.370	41,042
2- 8-84	38.000	267,444	15-10-84	37.500	118,700	28-12-84	42.250	229,959	12- 3-85	44.250	47,939
3- 8-84	37.500	245,065	16-10-84	38.250	113,201	2- 1-85	44.500	288,203	13- 3-85	43.500	75,723
6- 8-84	39.500	281,278	17-10-84	38.500	98,962	3- 1-85	46.000	314,726	14- 3-85	43.000	35,533
7- 8-84	39.870	495,230	18-10-84	37.250	55,481	4- 1-85	46.750	382,563	15- 3-85	43.120	50,615
8- 8-84	42.000	311,607	19-10-84	36.250	272,342	7- 1-85	48.000	348,687	18- 3-85	43.500	73,066
9- 8-84	41.750	202,909	22-10-84	36.500	90,134	8- 1-85	46.750	152,610	20- 3-85	44.370	56,204
10- 8-84	41.500	207,805	23-10-84	37.750	113,083	9- 1-85	48.370	191,408	21- 3-85	44.870	49,617
13- 8-84	41.250	122,635	24-10-84	37.750	42,205	10- 1-85	48.250	112,005	22- 3-85	43.500	75,801
14- 8-84	40.500	155,012	25-10-84	37.000	54,058	11- 1-85	49.250	269,307	25- 3-85	44.500	41,514
16- 8-84	40.750	161,555	26-10-84	37.000	96,433	14- 1-85	49.870	201,103	26- 3-85	44.000	6,267
17- 8-84	40.500	98,445	29-10-84	36.120	45,304	15- 1-85	50.000	131,334	27- 3-85	43.750	13,872
20- 8-84	40.500	83,388	30-10-84	34.620	110,884	16- 1-85	49.500	144,942	28- 3-85	43.250	35,814
21- 8-84	40.750	81,339	31-10-84	34.750	42,180	17- 1-85	49.250	102,098	29- 3-85	43.500	177,455
22- 8-84	41.000	110,879	2-11-84	33.500	99,911	18- 1-85	49.000	132,927	1- 4-85	44.000	28,837
23- 8-84	41.250	105,993	5-11-84	33.750	53,424	21- 1-85	47.000	114,537	2- 4-85	44.500	23,273
24- 8-84	41.000	114,489	6-11-84	33.250	52,153	22- 1-85	46.250	176,644	3- 4-85	46.000	51,694
27- 8-84	39.250	65,940	7-11-84	32.000	51,606	23- 1-85	47.250	156,774	8- 4-85	48.500	120,604
28- 8-84	39.120	94,453	8-11-84	31.000	82,170	24- 1-85	48.370	142,725	9- 4-85	48.250	125,750
29- 8-84	38.120	133,943	12-11-84	32.250	198,281	25- 1-85	49.000	137,067	10- 4-85	46.500	40,931
30- 8-84	38.120	95,691	13-11-84	31.870	142,305	28- 1-85	49.750	200,505	11- 4-85	46.750	104,521
31- 8-84	38.120	104,288	14-11-84	32.000	84,338	29- 1-85	49.750	141,431	12- 4-85	45.870	72,170
3- 9-84	39.250	80,296	15-11-84	33.370	79,978	30- 1-85	49.000	121,308	15- 4-85	44.500	47,091
4- 9-84	40.750	93,313	16-11-84	32.750	85,637	31- 1-85	49.000	73,395	16- 4-85	44.500	72,153
5- 9-84	42.000	79,180	19-11-84	34.370	75,956	1- 2-85	49.250	246,265	17- 4-85	45.750	50,351
6- 9-84	40.250	76,542	20-11-84	36.000	96,644	4- 2-85	49.370	202,233	18- 4-85	45.750	52,416
7- 9-84	40.750	157,508	21-11-84	36.500	60,175	5- 2-85	47.870	78,935	19- 4-85	45.500	186,411
10- 9-84	41.250	156,916	22-11-84	36.000	56,685	6- 2-85	48.750	93,144	22- 4-85	45.250	86,250
11- 9-84	41.870	100,910	23-11-84	36.250	56,956	7- 2-85	46.750	188,458	23- 4-85	45.000	45,918
12- 9-84	41.750	89,149	26-11-84	37.620	99,703	8- 2-85	46.870	124,086	24- 4-85	44.250	27,804
13- 9-84	41.250	88,345	27-11-84	37.120	131,784	11- 2-85	47.000	79,863	25- 4-85	44.250	52,618
14- 9-84	40.120	78,035	28-11-84	37.000	110,295	12- 2-85	48.250	60,994	26- 4-85	43.870	345,217
17- 9-84	40.750	61,196	29-11-84	37.250	95,327	13- 2-85	48.250	57,023	29- 4-85	43.250	30,136
18- 9-84	40.870	97,855	30-11-84	36.000	308,559	14- 2-85	48.250	139,497	30- 4-85	43.750	114,332
19- 9-84	39.500	54,227	3-12-84	37.500	137,079	15- 2-85	47.870	77,430	3- 5-85	45.000	41,108
20- 9-84	40.000	80,799	4-12-84	37.750	68,479	18- 2-85	47.750	32,323	6- 5-85	45.000	30,759
21- 9-84	40.250	73,071	5-12-84	37.500	79,700	19- 2-85	47.250	103,018	7- 5-85	45.870	35,885
24- 9-84	40.500	53,220	6-12-84	36.750	47,043	20- 2-85	47.120	56,176	8- 5-85	46.250	68,461
25- 9-84	38.500	72,084	7-12-84	35.250	136,747	21- 2-85	47.500	43,963	9- 5-85	46.870	79,872
26- 9-84	38.250	55,745	10-12-84	36.500	120,156	22- 2-85	47.250	57,369	10- 5-85	47.120	168,008
27- 9-84	39.000	59,058	11-12-84	36.250	79,554	25- 2-85	47.120	50,878	13- 5-85	46.870	55,048
28- 9-84	40.750	186,413	12-12-84	36.120	39,470	26- 2-85	46.750	54,940	14- 5-85	47.120	44,776
1-10-84	41.250	92,093	13-12-84	36.000	121,288	27- 2-85	46.750	25,672	16- 5-85	46.000	85,821

COTIZACIONES DE VALORES
CEPSA -ORD.

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	133.000	20,078	2-10-84	170.500	35,418	14-12-84	143.250	61,293	28- 2-85	163.750	113,770
23- 7-84	133.000	7,554	3-10-84	172.500	41,472	17-12-84	146.000	33,124	1- 3-85	163.750	49,486
24- 7-84	134.000	15,267	4-10-84	170.750	26,777	18-12-84	145.500	28,686	4- 3-85	164.500	63,661
26- 7-84	137.500	20,181	5-10-84	169.250	39,522	19-12-84	145.000	31,145	5- 3-85	162.500	22,374
27- 7-84	141.000	52,536	8-10-84	169.750	51,066	20-12-84	146.000	71,611	6- 3-85	160.000	58,448
30- 7-84	146.000	45,165	9-10-84	168.250	29,222	21-12-84	144.000	24,514	7- 3-85	153.500	50,449
31- 7-84	147.000	22,167	10-10-84	165.250	28,760	26-12-84	141.000	40,287	8- 3-85	156.750	74,909
1- 8-84	144.000	10,665	11-10-84	166.000	36,382	27-12-84	142.000	73,853	11- 3-85	157.250	86,930
2- 8-84	143.250	13,076	15-10-84	162.000	17,461	28-12-84	143.750	45,814	12- 3-85	154.250	43,371
3- 8-84	145.500	42,417	16-10-84	160.000	8,329	2- 1-85	149.250	38,213	13- 3-85	151.620	63,960
6- 8-84	147.500	10,518	17-10-84	155.500	40,651	3- 1-85	152.250	33,369	14- 3-85	148.500	128,071
7- 8-84	143.500	19,240	18-10-84	155.000	18,258	4- 1-85	154.750	113,156	15- 3-85	145.750	218,417
8- 8-84	143.750	12,548	19-10-84	148.000	17,668	7- 1-85	153.250	48,204	18- 3-85	148.000	216,431
9- 8-84	144.000	36,455	22-10-84	146.000	36,346	8- 1-85	152.000	41,546	20- 3-85	153.250	103,636
10- 8-84	143.000	28,935	23-10-84	150.500	26,576	9- 1-85	154.000	25,662	21- 3-85	151.750	65,529
13- 8-84	142.500	16,668	24-10-84	150.000	18,080	10- 1-85	156.750	31,076	22- 3-85	148.250	50,161
14- 8-84	142.500	19,172	25-10-84	145.000	13,952	11- 1-85	157.500	58,936	25- 3-85	151.250	26,526
16- 8-84	150.000	27,456	26-10-84	145.000	24,155	14- 1-85	160.250	67,998	26- 3-85	150.750	27,218
17- 8-84	146.000	35,812	29-10-84	145.000	18,088	15- 1-85	164.500	129,651	27- 3-85	147.250	89,888
20- 8-84	153.000	21,335	30-10-84	139.000	17,051	16- 1-85	163.250	73,827	28- 3-85	145.500	98,622
21- 8-84	154.000	18,457	31-10-84	140.000	15,578	17- 1-85	168.000	113,547	29- 3-85	148.500	133,967
22- 8-84	157.500	62,440	2-11-84	141.500	43,439	18- 1-85	164.500	198,662	1- 4-85	150.000	34,655
23- 8-84	159.500	22,049	5-11-84	143.000	27,236	21- 1-85	161.500	52,123	2- 4-85	150.000	24,360
24- 8-84	159.250	37,224	6-11-84	138.000	18,656	22- 1-85	158.500	52,613	3- 4-85	150.000	15,683
27- 8-84	157.750	9,575	7-11-84	132.000	17,678	23- 1-85	160.250	76,749	8- 4-85	152.750	35,015
28- 8-84	155.500	7,155	8-11-84	128.500	70,128	24- 1-85	165.500	146,434	9- 4-85	152.500	50,585
29- 8-84	155.000	9,742	12-11-84	134.000	107,583	25- 1-85	170.000	201,663	10- 4-85	149.500	26,082
30- 8-84	158.000	10,799	13-11-84	128.500	33,023	28- 1-85	178.500	201,748	11- 4-85	146.000	27,201
31- 8-84	158.500	32,161	14-11-84	132.000	24,860	29- 1-85	185.000	368,593	12- 4-85	146.250	40,990
3- 9-84	163.000	40,710	15-11-84	134.500	28,677	30- 1-85	176.250	199,948	15- 4-85	147.000	15,434
4- 9-84	169.000	46,476	16-11-84	136.250	47,385	31- 1-85	177.000	144,541	16- 4-85	149.000	26,467
5- 9-84	172.500	91,614	19-11-84	139.750	203,107	1- 2-85	170.000	231,732	17- 4-85	149.500	46,144
6- 9-84	169.500	44,593	20-11-84	142.000	55,813	4- 2-85	175.500	185,402	18- 4-85	147.500	18,291
7- 9-84	169.000	88,449	21-11-84	142.000	109,753	5- 2-85	166.750	159,336	19- 4-85	148.250	278,627
10- 9-84	169.500	42,000	22-11-84	141.500	37,693	6- 2-85	168.000	126,820	22- 4-85	152.250	105,823
11- 9-84	168.750	49,406	23-11-84	144.000	64,892	7- 2-85	164.750	92,166	23- 4-85	156.500	162,347
12- 9-84	167.000	29,924	26-11-84	150.000	122,370	8- 2-85	163.000	265,020	24- 4-85	155.370	58,013
13- 9-84	164.000	22,201	27-11-84	149.000	82,922	11- 2-85	163.000	95,322	25- 4-85	152.870	78,411
14- 9-84	163.000	47,354	28-11-84	152.250	76,464	12- 2-85	163.000	78,117	26- 4-85	153.000	257,265
17- 9-84	169.250	31,273	29-11-84	152.500	51,169	13- 2-85	164.500	147,550	29- 4-85	152.500	19,726
18- 9-84	166.500	31,373	30-11-84	152.000	65,155	14- 2-85	163.000	121,370	30- 4-85	157.250	61,862
19- 9-84	164.500	28,631	3-12-84	153.750	72,431	15- 2-85	166.000	154,760	3- 5-85	155.250	18,248
20- 9-84	164.750	37,525	4-12-84	157.000	69,565	18- 2-85	166.000	52,529	6- 5-85	155.500	24,959
21- 9-84	164.000	45,272	5-12-84	156.250	95,622	19- 2-85	162.500	92,386	7- 5-85	156.500	28,321
24- 9-84	167.250	36,365	6-12-84	152.250	66,025	20- 2-85	163.500	53,847	8- 5-85	157.500	34,792
25- 9-84	168.000	21,327	7-12-84	146.000	103,821	21- 2-85	160.750	28,957	9- 5-85	156.000	26,821
26- 9-84	165.750	18,367	10-12-84	151.500	56,079	22- 2-85	163.000	77,782	10- 5-85	154.000	45,370
27- 9-84	166.250	39,126	11-12-84	148.370	14,372	25- 2-85	164.000	45,460	13- 5-85	155.750	22,507
28- 9-84	167.750	48,413	12-12-84	148.500	21,334	26- 2-85	165.000	35,092	14- 5-85	154.500	19,101
1-10-84	170.000	86,809	13-12-84	146.250	28,594	27- 2-85	167.000	85,005	16- 5-85	151.000	45,558

COTIZACIONES DE VALORES
PETROMED

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	383.000	3,857	2-10-84	412.000	4,627	14-12-84	409.000	2,286	28- 2-85	490.000	3,043
23- 7-84	394.000	1,636	3-10-84	415.000	913	17-12-84	410.000	2,323	1- 3-85	492.000	5,632
24- 7-84	398.000	1,530	4-10-84	417.000	3,460	18-12-84	410.000	10,656	4- 3-85	494.000	3,269
26- 7-84	395.000	1,240	5-10-84	412.000	3,467	19-12-84	420.000	7,323	5- 3-85	493.000	3,447
27- 7-84	395.000	4,183	8-10-84	410.000	2,022	20-12-84	427.000	6,622	6- 3-85	493.000	1,203
30- 7-84	400.000	2,241	9-10-84	410.000	0	21-12-84	430.000	6,518	7- 3-85	493.000	3,885
31- 7-84	405.000	2,496	10-10-84	405.000	1,396	26-12-84	432.000	3,836	8- 3-85	493.000	3,947
1- 8-84	405.000	4,159	11-10-84	405.000	1,305	27-12-84	438.000	4,425	11- 3-85	490.000	1,224
2- 8-84	402.000	3,171	15-10-84	407.000	859	28-12-84	438.000	5,868	12- 3-85	490.000	4,469
3- 8-84	399.000	4,209	16-10-84	409.000	778	2- 1-85	440.000	8,104	13- 3-85	490.000	0
6- 8-84	405.000	3,998	17-10-84	410.000	586	3- 1-85	445.000	5,672	14- 3-85	490.000	3,047
7- 8-84	403.000	3,525	18-10-84	411.000	1,971	4- 1-85	450.000	2,854	15- 3-85	490.000	1,723
8- 8-84	408.000	1,440	19-10-84	408.000	1,763	7- 1-85	455.000	10,203	18- 3-85	490.000	1,021
9- 8-84	405.000	2,239	22-10-84	408.000	2,926	8- 1-85	455.000	4,842	20- 3-85	490.000	1,333
10- 8-84	405.000	0	23-10-84	410.000	969	9- 1-85	450.000	5,190	21- 3-85	488.000	960
13- 8-84	400.000	0	24-10-84	413.000	2,568	10- 1-85	450.000	5,721	22- 3-85	488.000	0
14- 8-84	395.000	1,368	25-10-84	414.000	1,676	11- 1-85	453.000	5,698	25- 3-85	485.000	2,792
16- 8-84	395.000	903	26-10-84	414.000	1,850	14- 1-85	460.000	6,777	26- 3-85	485.000	2,845
17- 8-84	395.000	835	29-10-84	418.000	2,850	15- 1-85	470.000	6,249	27- 3-85	485.000	9,309
20- 8-84	397.000	1,052	30-10-84	416.000	1,504	16- 1-85	480.000	11,034	28- 3-85	485.000	1,654
21- 8-84	398.000	632	31-10-84	419.000	2,293	17- 1-85	470.000	15,732	29- 3-85	485.000	1,014
22- 8-84	399.000	768	2-11-84	422.000	3,558	18- 1-85	465.000	3,369	1- 4-85	485.000	705
23- 8-84	398.000	722	5-11-84	426.000	9,093	21- 1-85	460.000	9,335	2- 4-85	485.000	618
24- 8-84	398.000	953	6-11-84	430.000	6,880	22- 1-85	450.000	4,678	3- 4-85	485.000	562
27- 8-84	400.000	1,273	7-11-84	437.000	5,859	23- 1-85	449.000	5,767	8- 4-85	487.000	966
28- 8-84	400.000	423	8-11-84	437.000	0	24- 1-85	447.000	8,575	9- 4-85	486.000	1,037
29- 8-84	400.000	331	12-11-84	415.000	3,303	25- 1-85	450.000	11,146	10- 4-85	482.000	853
30- 8-84	400.000	505	13-11-84	405.000	2,343	28- 1-85	460.000	0	11- 4-85	482.000	1,233
31- 8-84	400.000	685	14-11-84	403.000	4,684	29- 1-85	475.000	0	12- 4-85	477.000	1,601
3- 9-84	400.000	731	15-11-84	408.000	5,508	30- 1-85	485.000	8,735	15- 4-85	477.000	867
4- 9-84	410.000	6,105	16-11-84	417.000	5,900	31- 1-85	483.000	17,259	16- 4-85	477.000	1,498
5- 9-84	415.000	4,631	19-11-84	436.000	11,682	1- 2-85	483.000	5,619	17- 4-85	477.000	1,997
6- 9-84	417.000	2,052	20-11-84	434.000	9,650	4- 2-85	485.000	3,200	18- 4-85	477.000	1,131
7- 9-84	417.000	1,785	21-11-84	434.000	9,451	5- 2-85	475.000	2,661	19- 4-85	477.000	1,733
10- 9-84	420.000	2,598	22-11-84	430.000	4,055	6- 2-85	469.000	5,952	22- 4-85	472.000	1,089
11- 9-84	425.000	2,800	23-11-84	429.000	2,350	7- 2-85	469.000	1,909	23- 4-85	468.000	13,239
12- 9-84	425.000	2,318	26-11-84	433.000	3,223	8- 2-85	469.000	7,251	24- 4-85	472.000	20,822
13- 9-84	425.000	1,388	27-11-84	435.000	5,648	11- 2-85	477.000	1,150	25- 4-85	474.000	1,650
14- 9-84	425.000	0	28-11-84	435.000	2,292	12- 2-85	477.000	2,448	26- 4-85	475.000	4,020
17- 9-84	425.000	2,032	29-11-84	429.000	1,310	13- 2-85	477.000	3,695	29- 4-85	479.000	5,626
18- 9-84	420.000	929	30-11-84	429.000	2,884	14- 2-85	480.000	5,677	30- 4-85	485.000	7,055
19- 9-84	420.000	1,093	3-12-84	426.000	2,502	15- 2-85	485.000	2,791	3- 5-85	500.000	12,901
20- 9-84	420.000	753	4-12-84	430.000	7,897	18- 2-85	490.000	5,130	6- 5-85	506.000	9,286
21- 9-84	420.000	0	5-12-84	435.000	3,209	19- 2-85	490.000	2,144	7- 5-85	502.000	8,777
24- 9-84	415.000	2,145	6-12-84	435.000	4,103	20- 2-85	490.000	4,056	8- 5-85	500.000	3,867
25- 9-84	415.000	990	7-12-84	435.000	8,079	21- 2-85	490.000	2,052	9- 5-85	500.000	4,932
26- 9-84	415.000	1,776	10-12-84	401.000	2,255	22- 2-85	489.000	1,394	10- 5-85	500.000	7,512
27- 9-84	410.000	1,095	11-12-84	403.000	2,291	25- 2-85	485.000	2,372	13- 5-85	505.000	2,723
28- 9-84	400.000	6,484	12-12-84	406.000	7,424	26- 2-85	489.000	4,537	14- 5-85	[illegible]	3,213
1-10-84	405.000	3,744	13-12-84	410.000	3,490	27- 2-85	490.000	5,596	16- 5-85	506.000	4,749

COTIZACIONES DE VALORES
A. HORNOS

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	21.750	0	2-10-84	33.750	38,411	14-12-84	25.250	51,890	28- 2-85	35.000	33,604
23- 7-84	22.000	33,118	3-10-84	33.000	39,530	17-12-84	26.000	59,565	1- 3-85	35.500	33,117
24- 7-84	22.000	11,487	4-10-84	33.250	49,874	18-12-84	25.500	39,664	4- 3-85	36.250	133,136
26 7-84	21.750	31,090	5-10-84	31.870	38,789	19-12-84	26.750	41,486	5- 3-85	36.000	92,801
27- 7-84	20.750	9,242	8-10-84	32.250	24,467	20-12-84	27.750	38,609	6- 3-85	36.000	120,404
30- 7-84	22.000	24,490	9-10-84	31.750	58,080	21-12-84	27.750	72,126	7- 3-85	34.750	188,753
31- 7-84	24.000	44,157	10-10-84	30.000	44,210	26-12-84	27.500	41,131	8- 3-85	34.000	216,175
1- 8-84	25.000	50,356	11-10-84	29.750	21,900	27-12-84	27.500	40,920	11- 3-85	35.500	137,772
2- 8-84	27.000	137,706	15-10-84	31.000	11,973	28-12-84	27.000	46,798	12- 3-85	34.500	101,249
3- 8-84	27.250	38,236	16-10-84	31.500	14,521	2- 1-85	28.500	17,441	13- 3-85	35.000	28,291
6- 8-84	25.500	15,985	17-10-84	30.120	21,815	3- 1-85	29.250	14,033	14- 3-85	34.500	138,062
7- 8-84	26.000	15,930	18-10-84	30.000	7,203	4- 1-85	31.120	62,024	15- 3-85	34.250	77,413
8- 8-84	25.500	44,816	19-10-84	29.500	37,122	7- 1-85	31.250	55,138	18- 3-85	34.500	77,535
9- 8-84	25.000	18,775	22-10-84	28.500	29,970	8- 1-85	31.500	41,854	20- 3-85	35.500	63,025
10- 8-84	24.000	9,400	23-10-84	29.750	17,281	9- 1-85	30.750	80,075	21- 3-85	35.000	12,755
13- 8-84	23.000	14,350	24-10-84	29.750	15,304	10- 1-85	32.250	64,302	22- 3-85	33.750	17,365
14- 8-84	22.250	18,412	25-10-84	28.000	26,292	11- 1-85	33.750	108,381	25- 3-85	34.500	19,915
16- 8-84	23.000	0	26-10-84	28.000	18,050	14- 1-85	33.000	48,374	26- 3-85	34.250	14,522
17- 8-84	25.000	27,348	29-10-84	28.000	8,893	15- 1-85	32.000	62,989	27- 3-85	33.750	22,027
20- 8-84	25.500	13,125	30-10-84	27.000	11,850	16- 1-85	33.000	58,987	28- 3-85	33.000	61,570
21- 8-84	26.750	41,778	31-10-84	26.000	54,301	17- 1-85	32.250	307,875	29- 3-85	33.500	49,187
22- 8-84	27.250	45,558	2-11-84	28.000	15,332	18- 1-85	33.000	66,889	1- 4-85	34.000	38,994
23- 8-84	29.000	141,35[illegible]	5-11-84	28.000	24,743	21- 1-85	33.500	112,870	2- 4-85	34.000	10,631
24- 8-84	32.000	0	6-11-84	26.750	18,102	22- 1-85	32.000	35,830	3- 4-85	33.500	14,409
27- 8-84	30.500	131,570	7-11-84	26.500	11,614	23- 1-85	33.750	107,475	8- 4-85	33.750	4,558
28- 8-84	30.000	56,469	8-11-84	26.750	21,333	24- 1-85	34.750	169,373	9- 4-85	33.750	0
29- 8-84	29.870	35,095	12-11-84	27.750	34,395	25- 1-85	35.000	110,417	10- 4-85	32.500	64,214
30- 8-84	28.750	13,982	13-11-84	27.000	27,445	28- 1-85	36.870	140,176	11- 4-85	33.000	5,517
31- 8-84	31.000	31,152	14-11-84	27.000	13,956	29- 1-85	37.500	187,891	12- 4-85	31.500	83,030
3- 9-84	32.750	46,487	15-11-84	27.250	15,275	30- 1-85	37.500	139,804	15- 4-85	31.000	16,361
4- 9-84	32.750	31,045	16-11-84	29.500	23,923	31- 1-85	39.370	106,783	16- 4-85	32.500	49,912
5- 9-84	34.750	41,936	19-11-84	29.000	43,704	1- 2-85	39.620	150,340	17- 4-85	32.000	25,475
6- 9-84	35.250	81,927	20-11-84	28.500	21,065	4- 2-85	40.000	192,040	18- 4-85	32.000	14,85[illegible]
7 9-84	35.000	38,367	21-11-84	28.500	4,023	5- 2-85	38.000	0	19- 4-85	30.500	68,425
10- 9-84	36.750	21,736	22-11-84	27.500	14,803	6- 2-85	37.500	148,092	22- 4-85	31.370	82,006
11- 9-84	35.500	46,050	23-11-84	27.500	11,044	7- 2-85	36.750	59,770	23- 4-85	31.000	64,614
12- 9-84	34.500	68,429	26-11-84	28.250	32,019	8- 2-85	36.000	65,800	24- 4-85	31.000	39,950
13- 9-84	34.000	22,014	27-11-84	28.000	20,430	11- 2-85	37.000	33,390	25- 4-85	31.500	24,000
14- 9-84	34.000	0	28-11-84	27.500	14,437	12- 2-85	38.000	28,234	26- 4-85	30.500	4,737
17- 9-84	32.000	51,968	29-11-84	27.000	15,876	13- 2-85	38.120	39,184	29- 4-85	30.500	8,853
18- 9-84	31.000	106,766	30-11-84	25.000	33,245	14- 2-85	38.000	63,920	30- 4-85	30.500	137,279
19- 9-84	30.000	148,305	3-12-84	26.120	20,944	15- 2-85	37.500	62,854	3- 5-85	31.000	62,443
20- 9-84	32.000	105,483	4-12-84	26.500	9,559	18- 2-85	38.500	94,962	6- 5-85	31.870	10,015
21- 9-84	34.000	0	5-12-84	26.250	11,922	19- 2-85	37.870	57,929	7- 5-85	31.250	9,569
24- 9-84	34.000	136,593	6-12-84	26.000	13,045	20- 2-85	37.500	28,307	8- 5-85	31.000	1,200
25- 9-84	32.000	62,375	7-12-84	25.120	15,025	21- 2-85	37.000	18,924	9- 5-85	31.500	5,730
26- 9-84	32.000	64,233	10-12-84	26.870	31,165	22- 2-85	36.500	34,000	10- 5-85	31.250	33,679
27- 9-84	32.000	35,132	11-12-84	27.000	18,877	25- 2-85	36.000	20,913	13- 5-85	30.500	26,612
28- 9-84	34.000	49,843	12-12-84	25.500	11,865	26- 2-85	36.000	3,127	14- 5-85	30.500	25,667
1-10-84	34.750	18,117	13-12-84	25.750	13,301	27- 2-85	36.000	30,249	16- 5-85	30.000	20,353

COTIZACIONES DE VALORES
TUBACEX

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	55.000	940	2-10-84	69.500	7,645	14-12-84	59.750	12,433	28- 2-85	64.000	7,917
23- 7-84	54.000	2,799	3-10-84	68.500	3,833	17-12-84	60.000	1,849	1- 3-85	62.000	9,312
24- 7-84	53.000	1,666	4-10-84	69.500	16,370	18-12-84	59.000	2,228	4- 3-85	63.250	2,128
26- 7-84	54.000	10,250	5-10-84	63.000	7,100	19-12-84	59.000	3,500	5- 3-85	64.000	7,139
27- 7-84	54.500	2,697	8-10-84	67.500	2,000	20-12-84	58.750	33,295	6- 3-85	64.000	2,858
30- 7-84	55.500	2,324	9-10-84	66.500	5,382	21-12-84	58.750	18,728	7- 3-85	63.500	2,200
31- 7-84	56.000	3,901	10-10-84	65.000	1,400	26-12-84	58.750	9,000	8- 3-85	62.000	2,124
1- 8-84	56.000	3,922	11-10-84	63.500	10,540	27-12-84	59.000	8,474	11- 3-85	62.000	0
2- 8-84	56.000	0	15-10-84	63.500	0	28-12-84	59.000	5,056	12- 3-85	61.000	3,838
3- 8-84	57.000	6,532	16-10-84	63.500	0	2- 1-85	58.000	6,800	13- 3-85	61.000	0
6- 8-84	59.000	0	17-10-84	64.000	6,999	3- 1-85	60.000	0	14- 3-85	61.000	0
7- 8-84	62.000	33,278	18-10-84	62.500	5,321	4- 1-85	62.000	0	15- 3-85	61.000	240
8- 8-84	61.000	6,785	19-10-84	62.000	19,721	7- 1-85	63.000	4,260	18- 3-85	61.000	11,541
9- 8-84	59.500	3,669	22-10-84	60.000	3,796	8- 1-85	61.000	7,265	20- 3-85	60.500	2,809
10- 8-84	59.000	5,230	23-10-84	58.000	9,095	9- 1-85	62.000	7,470	21- 3-85	60.000	11,050
13- 8-84	60.000	3,310	24-10-84	61.000	5,368	10- 1-85	64.000	8,631	22- 3-85	60.000	0
14- 8-84	58.500	1,229	25-10-84	59.000	33,785	11- 1-85	63.500	11,862	25- 3-85	58.000	1,243
16- 8-84	62.000	3,745	26-10-84	58.000	12,269	14- 1-85	67.000	27,054	26- 3-85	58.000	21,453
17- 8-84	62.000	0	29-10-84	60.000	7,426	15- 1-85	67.000	6,617	27- 3-85	58.000	4,454
20- 8-84.	65.000	5,263	30-10-84	60.000	14,520	16- 1-85	67.000	5,226	28- 3-85	57.000	6,895
21- 8-84	68.250	14,126	31-10-84	58.500	3,067	17- 1-85	66.500	4,118	29- 3-85	57.000	7,410
22- 8-84	67.500	5,500	2-11-84	58.500	0	18- 1-85	67.500	9,962	1- 4-85	58.500	817
23- 8-84	68.000	6,000	5-11-84	61.000	4,761	21- 1-85	65.500	5,648	2- 4-85	58.500	0
24- 8-84	67.000	7,950	6-11-84	61.000	2,589	22- 1-85	64.000	2,150	3- 4-85	58.500	5,113
27- 8-84	67.000	5,350	7-11-84	58.500	10,572	23- 1-85	65.000	10,605	8- 4-85	58.500	2,596
28- 8-84	65.750	16,690	8-11-84	57.500	17,800	24- 1-85	66.000	4,931	9- 4-85	58.000	1,200
29- 8-84	65.750	20,500	12-11-84	60.000	3,518	25- 1-85	67.500	24,284	10- 4-85	56.000	5,213
30- 8-84	64.000	8,680	13-11-84	60.500	9,012	28- 1-85	69.000	640	11- 4-85	54.000	6,857
31- 8-84	65.000	14,497	14-11-84	60.500	0	29- 1-85	72.000	23,870	12- 4-85	52.000	6,370
3- 9-84	65.000	11,400	15-11-84	61.000	6,836	30- 1-85	70.000	17,737	15- 4-85	49.500	8,175
4- 9-84	66.000	16,906	16-11-84	63.500	16,150	31- 1-85	70.000	24,200	16- 4-85	51.000	10,752
5- 9-84	69.250	6,454	19-11-84	65.000	23,700	1- 2-85	68.000	8,498	17- 4-85	51.000	0
6- 9-84	72.000	4,375	20-11-84	65.000	2,499	4- 2-85	69.000	11,500	18- 4-85	53.000	4,367
7- 9-84	69.870	14,600	21-11-84	64.250	530	5- 2-85	67.000	7,533	19- 4-85	55.000	4,750
10- 9-84	70.000	5,337	22-11-84	64.000	4,400	6- 2-85	68.000	3,920	22- 4-85	57.000	9,225
11- 9-84	72.000	7,305	23-11-84	64.000	14,487	7- 2-85	67.000	14,340	23- 4-85	55.000	3,620
12- 9-84	72.000	0	26-11-84	65.500	7,475	8- 2-85	67.000	23,393	24- 4-85	56.000	1,625
13- 9-84	71.000	4,357	27-11-84	64.500	3,658	11- 2-85	67.000	11,850	25- 4-85	56.000	0
14- 9-84	73.000	11,852	28-11-84	63.500	3,019	12- 2-85	67.000	19,870	26- 4-85	54.000	14,826
17- 9-84	74.000	3,026	29-11-84	65.500	13,134	13- 2-85	68.000	17,590	29- 4-85	52.000	3,207
18- 9-84	72.500	14,121	30-11-84	65.250	16,395	14- 2-85	67.000	10,193	30- 4-85	52.000	3,500
19- 9-84	71.000	2,000	3-12-84	63.250	10,760	15- 2-85	67.000	7,030	3- 5-85	53.000	5,047
20- 9-84	66.000	19,448	4-12-84	61.250	4,900	18- 2-85	67.000	9,990	6- 5-85	53.000	10,529
21- 9-84	69.000	7,172	5-12-84	61.250	10,134	19- 2-85	66.000	4,945	7- 5-85	53.500	7,311
24- 9-84	70.000	13,656	6-12-84	61.000	3,040	20- 2-85	66.000	0	8- 5-85	53.500	1,500
25- 9-84	70.000	17,984	7-12-84	60.000	18,647	21- 2-85	63.000	8,735	9- 5-85	54.000	5,300
26- 9-84	68.000	6,209	10-12-84	57.000	8,127	22- 2-85	62.000	3,044	10- 5-85	53.500	2,100
27- 9-84	66.500	10,471	11-12-84	60.000	8,192	25- 2-85	64.000	9,540	13- 5-85	53.500	1,460
28- 9-84	69.000	5,174	12-12-84	59.500	3,000	26- 2-85	64.000	3,270	14- 5-85	54.000	2,525
1-10-84	69.000	0	13-12-84	59.500	2,500	27- 2-85	64.500	3,702	16- 5-85	52.750	8,434

COTIZACIONES DE VALORES
MOTOR IBER.

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	67.500	0	2-10-84	78.500	42,[illegible]5	14-12-84	70.000	0	28- 2-85	74.500	16,735
23- 7-84	67.500	3,585	3-10-84	77.000	9,945	17-12-84	70.000	0	1- 3-85	74.500	24,735
24- 7-84	68.250	14,100	4-10-84	77.000	8,170	18-12-84	68.000	17,383	4- 3-85	74.500	10,402
26- 7-84	69.000	26,978	5-10-84	77.000	0	19-12-84	68.000	9,644	5- 3-85	74.500	8,176
27- 7-84	71.000	13,912	8-10-84	77.000	0	20-12-84	68.000	2,700	6- 3-85	73.500	12,597
30- 7-84	74.000	26,468	9-10-84	75.500	9,786	21-12-84	68.000	0	7- 3-85	71.000	8,784
31- 7-84	73.000	6,500	10-10-84	73.000	16,475	26-12-84	68.000	0	8- 3-85	69.000	12,266
1- 8-84	72.250	31,272	11-10-84	72.000	7,110	27-12-84	68.000	0	11- 3-85	70.000	16,355
2- 8-84	72.500	5,900	15-10-84	72.000	8,970	28-12-84	68.000	0	12- 3-85	71.000	20,600
3- 8-84	72.250	6,445	16-10-84	73.000	3,427	2- 1-85	70.000	4,325	13- 3-85	70.500	14,729
6- 8-84	72.000	12,175	17-10-84	74.000	5,190	3- 1-85	71.000	3,133	14- 3-85	70.000	8,100
7- 8-84	70.250	15,891	18-10-84	70.500	7,353	4- 1-85	71.000	0	15- 3-85	69.000	17,800
8- 8-84	69.000	9,440	19-10-84	70.500	5,760	7- 1-85	71.000	10,760	18- 3-85	70.500	19,460
9- 8-84	67.500	16,480	22-10-84	67.000	4,230	8- 1-85	72.000	10,000	20- 3-85	70.500	8,331
10- 8-84	66.500	17,490	23-10-84	68.000	13,558	9- 1-85	73.000	2,315	21- 3-85	71.500	11,892
13- 8-84	68.000	7,666	24-10-84	69.000	9,500	10- 1-85	74.000	8,100	22- 3-85	71.500	0
14- 8-84	68.250	7,750	25-10-84	68.500	7,030	11- 1-85	77.000	15,520	25- 3-85	70.000	13,557
16- 8-84	69.500	6,820	26-10-84	69.000	13,020	14- 1-85	78.000	16,313	26- 3-85	68.000	11,872
17- 8-84	71.000	14,800	29-10-84	69.000	3,350	15- 1-85	78.000	0	27- 3-85	67.500	4,630
20- 8-84	73.500	15,310	30-10-84	68.000	2,650	16- 1-85	76.000	22,419	28- 3-85	67.500	9,533
21- 8-84	72.500	7,040	31-10-84	66.500	3,557	17- 1-85	75.000	8,290	29- 3-85	68.000	19,525
22- 8-84	72.750	11,740	2-11-84	67.000	2,505	18- 1-85	76.000	13,465	1- 4-85	69.500	11,750
23- 8-84	72.000	10,150	5-11-84	67.000	7,425	21- 1-85	74.000	8,040	2- 4-85	68.500	9,469
24- 8-84	71.000	7,800	6-11-84	66.000	5,074	22- 1-85	71.000	23,678	3- 4-85	68.500	4,000
27- 8-84	69.000	9,342	7-11-84	63.000	13,436	23- 1-85	69.000	23,673	8- 4-85	68.000	5,150
28- 8-84	69.500	1,800	8-11-84	60.000	0	24- 1-85	71.500	13,100	9- 4-85	68.000	7,689
29- 8-84	70.000	2,061	12-11-84	61.000	11,885	25- 1-85	73.000	10,491	10- 4-85	67.250	6,794
30- 8-84	70.000	3,080	13-11-84	61.500	10,526	28- 1-85	75.000	11,085	11- 4-85	65.000	5,834
31- 8-84	71.000	12,492	14-11-84	61.000	2,255	29- 1-85	77.250	30,904	12- 4-85	62.000	11,835
3- 9-84	73.000	7,858	15-11-84	63.000	8,825	30- 1-85	76.250	32,947	15- 4-85	62.000	22,277
4- 9-84	72.000	5,215	16-11-84	65.000	4,524	31- 1-85	75.000	31,890	16- 4-85	61.500	25,971
5- 9-84	73.500	26,272	19-11-84	68.500	20,986	1- 2-85	75.000	17,850	17- 4-85	63.000	17,589
6- 9-84	77.000	62,606	20-11-84	71.500	17,737	4- 2-85	74.000	26,117	18- 4-85	62.000	5,929
7- 9-84	79.000	58,740	21-11-84	73.000	27,471	5- 2-85	72.000	12,211	19- 4-85	60.000	11,682
10- 9-84	79.500	15,483	22-11-84	71.000	8,978	6- 2-85	70.000	15,950	22- 4-85	61.000	13,001
11- 9-84	81.000	21,550	23-11-84	72.000	8,600	7- 2-85	71.000	9,850	23- 4-85	61.000	19,338
12- 9-84	80.000	26,002	26-11-84	73.500	18,130	8- 2-85	71.000	7,155	24- 4-85	61.500	5,574
13- 9-84	80.000	18,398	27-11-84	71.250	8,430	11- 2-85	71.000	12,226	25- 4-85	61.500	4,539
14- 9-84	78.000	10,940	28-11-84	71.500	4,926	12- 2-85	73.000	25,990	26- 4-85	60.000	9,914
17- 9-84	79.500	6,790	29-11-84	71.000	4,790	13- 2-85	72.500	30,582	29- 4-85	60.000	4,631
18- 9-84	80.250	19,492	30-11-84	73.500	16,512	14- 2-85	72.000	16,100	30- 4-85	60.000	0
19- 9-84	78.000	29,778	3-12-84	73.000	4,601	15- 2-85	72.000	14,375	3- 5-85	59.000	7,098
20- 9-84	77.000	4,520	4-12-84	72.000	2,991	18- 2-85	74.000	30,217	6- 5-85	59.000	0
21- 9-84	77.000	12,434	5-12-84	72.000	0	19- 2-85	75.000	87,247	7- 5-85	58.000	18,693
24- 9-84	77.250	8,250	6-12-84	69.000	2,775	20- 2-85	73.000	6,120	8- 5-85	60.000	6,250
25- 9-84	77.000	11,850	7-12-84	69.000	0	21- 2-85	72.000	7,261	9- 5-85	61.000	7,750
26- 9-84	77.000	10,731	10-12-84	69.000	0	22- 2-85	72.000	32,320	10- 5-85	60.000	7,585
27- 9-84	76.000	21,033	11-12-84	70.000	4,242	25- 2-85	73.000	16,651	13- 5-85	60.000	0
28- 9-84	75.500	3,900	12-12-84	70.000	0	26- 2-85	73.500	20,950	14- 5-85	59.000	11,470
1-10-84	77.000	4,340	13-12-84	70.000	0	27- 2-85	74.250	19,675	16- 5-85	59.000	2,498

COTIZACIONES DE VALORES
TELEFONICA

FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS	FECHA	CAMBIO	TITULOS
20- 7-84	81.250	42,725	2-10-84	103.500	464,396	14-12-84	91.500	[illegible]	28- 2-85	123.750	[illegible]
23- 7-84	81.120	80,545	3-10-84	103.500	663,453	17-12-84	92.370	253,970	1- 3-85	123.750	245,410
24- 7-84	81.250	33,899	4-10-84	104.750	1,368,787	18-12-84	94.000	759,754	4- 3-85	123.750	355,182
26- 7-84	82.750	101,768	5-10-84	104.120	513,695	19-12-84	93.120	170,372	5- 3-85	124.000	434,702
27- 7-84	83.000	178,774	8-10-84	104.000	728,953	20-12-84	92.500	151,120	6- 3-85	124.250	216,653
30- 7-84	84.500	83,806	9-10-84	102.750	623,970	21-12-84	92.500	1,160,032	7- 3-85	124.250	864,381
31- 7-84	86.250	161,702	10-10-84	101.000	698,604	[illegible]	92.620	196,783	8- 3-85	125.000	397,749
1- 8-84	86.250	215,265	11-10-84	100.500	349,138	27-12-84	93.000	559,234	11- 3-85	126.500	645,764
2- 8-84	86.370	59,815	15-10-84	100.000	610,155	28-12-84	93.000	358,285	12- 3-85	126.000	[illegible]
3- 8-84	88.500	[illegible]	16-10-84	100.000	514,417	2- 1-85	94.500	89,693	13- 3-85	125.000	320,547
6- 8-84	90.250	288,009	17-10-84	99.000	386,912	3- 1-85	96.000	204,210	14- 3-85	125.000	260,502
7- 8-84	88.750	239,995	18-10-84	97.000	224,443	4- 1-85	99.250	343,321	15- 3-85	125.500	491,242
8- 8-84	89.250	487,723	19-10-84	96.250	[illegible]	7- 1-85	99.750	144,417	18- 3-85	125.500	420,262
9- 8-84	[illegible]	83,443	22-10-84	96.000	316,895	8- 1-85	99.500	252,724	20- 3-85	124.500	250,469
10- 8-84	88.500	170,419	23-10-84	96.000	146,967	9- 1-85	99.870	727,718	21- 3-85	123.500	232,267
13- 8-84	88.500	201,774	24-10-84	96.000	123,809	10- 1-85	102.250	544,390	22- 3-85	123.500	237,456
14- 8-84	89.000	95,063	25-10-84	96.120	131,748	11- 1-85	103.000	546,516	25- 3-85	123.500	682,375
16- 8-84	90.500	195,569	26-10-84	96.000	284,873	14- 1-85	104.500	273,085	26- 3-85	124.750	279,718
17- 8-84	90.500	71,725	29-10-84	96.000	99,092	15- 1-85	107.000	545,230	27- 3-85	124.750	449,229
20- 8-84	93.000	119,898	30-10-84	95.000	135,065	16- 1-85	107.750	504,358	28- 3-85	126.000	298,917
21- 8-84	93.250	237,863	31-10-84	95.000	148,185	17- 1-85	108.750	711,057	29- 3-85	127.120	353,507
22- 8-84	93.500	169,833	2-11-84	95.000	84,207	18- 1-85	110.750	1,163,150	1- 4-85	127.500	99,480
23- 8-84	93.750	130,585	5-11-84	95.000	175,162	21- 1-85	113.500	1,212,705	2- 4-85	128.000	147,273
24- 8-84	93.500	119,569	6-11-84	95.000	98,556	22- 1-85	113.500	1,678,725	3- 4-85	128.000	109,834
27- 8-84	91.500	159,883	7-11-84	95.000	97,662	23- 1-85	116.250	1,609,308	8- 4-85	129.000	520,297
28- 8-84	91.120	116,530	8-11-84	95.000	373,924	24- 1-85	119.000	1,125,664	9- 4-85	129.000	27,681
29- 8-84	91.750	73,524	12-11-84	88.750	287,733	25- 1-85	119.750	1,040,293	10- 4-85	128.500	135,088
30- 8-84	92.000	84,166	13-11-84	89.000	158,338	28- 1-85	124.000	1,618,125	11- 4-85	127.500	266,395
31- 8-84	92.750	175,114	14-11-84	88.500	85,105	29- 1-85	126.000	1,340,801	12- 4-85	126.500	325,788
3- 9-84	93.000	126,094	15-11-84	89.500	233,252	30- 1-85	122.500	751,799	15- 4-85	125.000	188,922
4- 9-84	93.870	108,088	16-11-84	90.750	167,324	31- 1-85	128.750	1,273,602	16- 4-85	125.000	178,000
5- 9-84	94.750	264,180	19-11-84	91.500	306,796	1- 2-85	134.750	604,448	17- 4-85	127.000	244,853
6- 9-84	94.750	209,248	20-11-84	93.000	257,284	4- 2-85	135.750	2,224,514	18- 4-85	125.750	142,158
7- 9-84	95.500	214,573	21-11-84	93.750	241,462	5- 2-85	129.000	1,309,172	19- 4-85	125.000	164,454
10- 9-84	99.000	316,398	22-11-84	93.870	95,682	6- 2-85	133.500	757,247	22- 4-85	124.000	166,820
11- 9-84	98.000	252,315	23-11-84	94.500	152,472	7- 2-85	127.000	1,359,120	23- 4-85	123.370	58,479
12- 9-84	98.500	158,813	26-11-84	94.750	205,542	8- 2-85	125.120	790,782	24- 4-85	[illegible]	118,869
13- 9-84	98.500	531,092	27-11-84	94.500	99,578	11- 2-85	131.250	997,928	25- 4-85	121.000	194,167
14- 9-84	99.250	575,814	28-11-84	94.870	112,566	12- 2-85	130.870	991,879	26- 4-85	120.750	372,372
17- 9-84	102.750	503,605	29-11-84	94.870	75,617	13- 2-85	132.250	575,129	29- 4-85	120.000	126,115
18- 9-84	102.000	359,700	30-11-84	93.500	147,513	14- 2-85	134.750	837,101	30- 4-85	119.000	[illegible]
19- 9-84	102.000	274,744	3-12-84	92.750	91,561	15- 2-85	133.500	741,430	3- 5-85	118.000	177,984
20- 9-84	102.500	196,766	4-12-84	92.000	167,615	18- 2-85	[illegible]	833,676	6- 5-85	118.000	156,143
21- 9-84	101.620	511,122	5-12-84	92.250	99,722	19- 2-85	131.250	665,712	7- 5-85	119.500	104,217
24- 9-84	103.250	615,457	6-12-84	91.500	72,688	20- 2-85	130.120	263,287	8- 5-85	121.750	212,808
25- 9-84	103.120	[illegible]	7-12-84	90.250	97,102	21- 2-85	126.500	449,641	9- 5-85	123.500	162,667
26- 9-84	102.000	455,466	10-12-84	92.500	109,328	22- 2-85	124.500	295,720	10- 5-85	123.500	277,395
27- 9-84	102.000	494,717	11-12-84	92.750	171,338	25- 2-85	123.000	470,462	13- 5-85	122.370	81,679
28- 9-84	102.500	530,675	12-12-84	92.000	63,767	26- 2-85	123.620	[illegible]	14- 5-85	122.750	145,605
1-10-84	103.750	537,370	13-12-84	91.000	72,702	27- 2-85	[illegible]	198,950	16- 5-85	122.500	156,665

5.4.2.- Determinación de la rentabilidad de los valores.

Con estas tablas de cotizaciones determinaremos la rentabilidad de los treinta valores en dos periodos de tiempo. Elegimos hacer esta determinación de la rentabilidad en dos periodos con objeto de poder comparar los resultados de ambos, ya que como veremos con el horizonte semestral detectaremos variaciones significativas que no se detectarían con el horizonte trimestral. Esta elección temporal en trimestre y semestre no ha sido gratuita, puesto que estos periodos, el trimestral y el semestral, son los horizontes de cálculo de rentabilidad más corrientes en los análisis de las operaciones bursátiles.

Determinaremos la rentabilidad en estos valores de la forma siguiente:

a) Rentabilidad trimestral.

Para determinar la rentabilidad trimestral hemos considerado sesenta sesiones. La rentabilidad de cada valor se determina calculando en primer lugar la rentabilidad obtenida después de sesenta sesiones comprando a cada cotización. Esta rentabilidad sería igual a:

$$\frac{\text{cotización después de 60 sesiones - cotización inicial}}{\text{cotización inicial}} \cdot 100$$

Esto se repite para la cotización de cada sesión hasta para aquella en que el número de sesiones posteriores sea menor estrictamente que sesenta. Es decir, si x_i es la cotización tomada como inicial, entonces la rentabilidad obtenida después de sesenta sesiones comprando a cada cotización es igual a :

$$\frac{X_{i+60} - X_i}{X_i} \cdot 100 \quad , \quad i = 1 , 2 , \ldots , 140$$

Para, después, calcular la rentabilidad trimestral del valor, que sería igual al promedio aritmético de las ciento cuarenta rentabilidades obtenidas.

b) Rentabilidad semestral

En este caso se toma el semestre equivalente a ciento veinte sesiones y se determina de forma similar a como lo hemos hecho para el trimestral.

La rentabilidad después de ciento veinte sesiones comprando a cada cotización sería igual a:

$$\frac{\text{cotización después de 120 sesiones - cotización inicial}}{\text{cotización inicial}} \cdot 100$$

Es decir, si consideramos como antes x_i como cotización inicial, determinaríamos ochenta rentabilidades de la forma

$$\frac{X_{i+120} - X_i}{X_i} \cdot 100 \quad , \qquad i = 1 , \ldots , 80$$

Y la rentabilidad semestral del valor sería el promedio de las ochenta rentabilidades obtenidas.

De este modo, las rentabilidades obtenidas para cada uno de los valores son:

a) <u>Rentabilidades trimestrales</u>

B. Bilbao	6.83230
B. Central	0.62500
Banesto	2.10210
B. Hispano	-2.39521
B. Popular	-1.08401
Santander	9.69697
B. Vizcaya	4.13625
FECSA	-6.41026
Hidrola	-6.85905
Iberduelo	-6.37255
Sevillana	-3.60360
Unión-Fenosa	-8.60534
Azucarera	-7.83410
Asland	-2.61438
Valderribas	1.66667

Dragados	-6.47888
Vallehermoso	-8.27068
Huarte	-19.28572
General de Inversiones	0.83333
Popularinsa	-13.16456
Española de Inversiones	8.14815
Sarrió	-21.32353
Energías	0.37174
Explosivos Rio Tinto	-4.66321
CEPSA	-8.20669
Petromed	6.07966
Altos Hornos	-21.30115
Tubacex	-22.42647
Motor Ibérica	-18.62069
Telefónica	-7.37240

b) <u>Rentabilidades semestrales</u>

B. Bilbao	7.83699
B. Central	-0.92308
Banesto	-0.58479
B. Hispano	-25.90909
B. Popular	-0.81522
B. Santander	12.07430
B. Vizcaya	5.41872
FECSA	13.17829

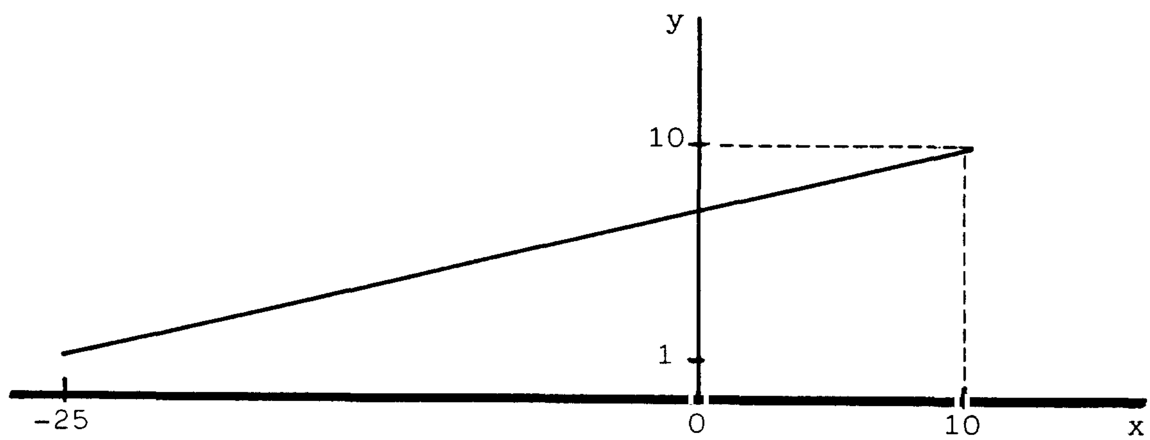
Hidrola	19.31034
Iberduero	19.00312
Sevillana	21.37023
Unión-Fenosa	18.46154
Azucarera	21.76560
Asland	-8.58896
Valderribas	-3.17460
Dragados	7.79221
Vallehermoso	27.08334
Huarte	-11.71875
General de Inversiones	3.41880
Popularinsa	-13.38384
Española de Inversiones	21.66667
Sarrió	-11.93416
Energias	19.20530
Explosivos Rio Tinto	37.84837
CEPSA	12.26766
Petromed	24.01961
Altos Hornos	10.09175
Tubacex	-13.52459
Motor Ibérica	-6.34921
Telefónica	36.87151

De acuerdo con la metodología expuesta transformamos estas rentabilidades para que varien en un campo de valores positivos, ya que los elementos de la matríz como cocientes de probabilidades (ver la exposición teórica de la metodología) tienen que ser positivos, y estos elementos los vamos a establecer mediante el cociente de rentabilidades. Esta transformación que vamos a hacer es un instrumento de trabajo para acoplar los datos del problema a las condiciones teóricas del método y no afecta al problema real. Establecemos, por tanto las rentabilidades transformadas de cada uno de los valores en los dos periodos, trimestral y semestral.

a) Rentabilidades trimestrales transformadas.

En este caso transformamos el intervalo -25—10 en el 1—10. Si representamos la rentabilidad transformada por "y" y la rentabilidad inicial por "x" , entonces la ecuación de la transformación es:

$$y = \frac{10 - 1}{10 + 25} (x + 25) + 1$$



Con esta transformación la columna de rentabilidades trimestrales transformadas sería:

B. Bilbao	9.1854485
B. Central	7.5892857
Banesto	7.9691114
B. Hispano	6.8126602
B. Popular	7.149826
B. Santander	9.922078
B. Vizcaya	8.4921785
FECSA	5.7802188
Hidrola	5.6648157
Iberduero	5.7899157
Sevillana	6.5019314
Unión-Fenosa	5.2157697
Azucarera	5.4140885
Asland	6.7563022
Valderribas	7.8571437
Dragados	5.7625737
Vallehermoso	5.3018251
Huarte	2.4693862
General de Inversiones	7.6428562
Popularinsa	4.0433988
Española de Inversiones	9.52381
Sarrió	1.945378
Energias	7.5241617
Explosivos Rio Tinto	6.2294602
CEPSA	5.3182797
Petromed	8.9919125

Altos Hornos	1.9511328
Tubacex	1.6617648
Motor Ibérica	2.640394
Telefónica	5.5328114

b) Rentabilidades semestrales transformadas.

En este caso transformamos el intervalo -25—45 en el intervalo 1—19 , con la misma ecuación de la recta anterior. Ampliamos el intervalo para que contenga a todas las rentabilidades de la tabla semestral.

De la misma forma, por tanto, obtenemos la siguiente tabla de rentabilidades semestrales transformadas:

B. Bilbao	9.4437974
B. Central	7.191208
Banesto	7.2781968
Hispano	0.766234
Popular	7.2189434
Santander	10.533391
B. Vizcaya	8.8219565
FECSA	10.817274
Hidrola	12.394087
Iberduero	12.315088
Sevillana	12.923773

Uníón-Fenosa	12.175824
Azucarera	13.02544
Asland	5.2199817
Valderribas	6.6122457
Dragados	9.4322825
Vallehermoso	14.392858
Huarte	4.4151785
General de Inversiones	8.3076914
Popularinsa	3.9870125
Española de Inversiones	13
Sarrió	4.3597874
Energias	12.367077
Explosivos Rio Tinto	17.161009
CEPSA	10.583112
Petromed	13.605042
Altos Hornos	10.023592
Tubacex	3.9508197
Motor Ibérica	5.7959174
Telefónica	16.909816

5.4.3.- Construcción de la matriz de relación de valores.

Con las columnas de rentabilidades trimestrales y semestrales transformadas, construiremos las correspondientes matrices en relación de valores (trimestral y semestral). Cada elemento de la matriz es el cociente entre la rentabilidad del elemento de la fila y la rentabilidad del elemento de la columna.

Hemos construido la relación de este modo, considerando la hipótesis de que la probabilidad de invertir en un título sea proporcional a la rentabilidad normalizada -o transformada- de dicho título. Esta hipótesis se justifica por el hecho de que si la rentabilidad normalizada de un título es a y la de otro título es b , la probabilidad de que el primero mejore en rentabilidad al segundo es proporcional al cociente de las rentabilidades respectivas.

Las dos matrices de relación de valores -trimestral y semestral- figuran a continuación en tres páginas cada una debido a que son de dimensión 30x30 . Encontraremos en cada página las treinta filas y diez de las columnas.

En este caso como tenemos un mecanismo fijado de antemano de una manera general para establecer los elementos de la matriz, no hemos hecho referencia a la escala sugerida por Saaty, ya que como dijimos en la exposición teórica del método del autovalor, la escala propuesta era solamente una sugerencia.

MATRIZ DE RELACION DE VALORES
relacion trimestral

	B.BILBAO	B.CENTRAL	BANESTO	B.HISPANO	B.POPULAR	SANTAND.400	B.VIZCAYA	FECSA PQS.A	HIDROLA	IBERDUERO
B.BILBAO	1.000	1.210	1.153	1.348	1.285	0.926	1.082	1.589	1.621	1.586
B.CENTRAL	0.826	1.000	0.952	1.114	1.061	0.765	0.894	1.313	1.340	1.311
BANESTO	0.868	1.050	1.000	1.170	1.115	0.803	0.938	1.379	1.407	1.376
B.HISPANO	0.742	0.898	0.855	1.000	0.953	0.687	0.802	1.179	1.203	1.177
B.POPULAR	0.778	0.942	0.897	1.049	1.000	0.721	0.842	1.237	1.262	1.235
SANTAND.400	1.080	1.307	1.245	1.456	1.388	1.000	1.168	1.717	1.752	1.714
B.VIZCAYA	0.925	1.119	1.066	1.247	1.188	0.856	1.000	1.469	1.499	1.467
FECSA PQS.A	0.629	0.762	0.725	0.848	0.808	0.583	0.681	1.000	1.020	0.998
HIDROLA	0.617	0.746	0.711	0.832	0.792	0.571	0.667	0.980	1.000	0.978
IBERDUERO	0.630	0.763	0.727	0.850	0.810	0.584	0.682	1.002	1.022	1.000
SEVILLANA	0.708	0.857	0.816	0.954	0.909	0.655	0.766	1.125	1.148	1.123
UNION-FENOS	0.568	0.687	0.654	0.766	0.729	0.526	0.614	0.902	0.921	0.901
AZUCARERA	0.589	0.713	0.679	0.795	0.757	0.546	0.638	0.937	0.956	0.935
ASLAND	0.736	0.890	0.848	0.992	0.945	0.681	0.796	1.169	1.193	1.167
VALDEFRIVAS	0.855	1.035	0.986	1.153	1.099	0.792	0.925	1.359	1.387	1.357
DRAGADOS OR	0.627	0.759	0.723	0.846	0.806	0.581	0.679	0.997	1.017	0.995
VALLEHERM.O	0.577	0.699	0.665	0.778	0.742	0.534	0.624	0.917	0.936	0.916
HUARTE	0.269	0.325	0.310	0.362	0.345	0.249	0.291	0.427	0.436	0.426
GRAL.INVER.	0.832	1.007	0.959	1.122	1.069	0.770	0.900	1.322	1.349	1.320
POPULINSA A	0.440	0.533	0.507	0.594	0.566	0.408	0.476	0.700	0.714	0.698
ESP.INVERS.	1.037	1.255	1.195	1.398	1.332	0.960	1.121	1.648	1.681	1.645
SARRIO PAP.	0.213	0.256	0.244	0.286	0.272	0.196	0.229	0.337	0.345	0.336
ENERGIAS	0.819	0.991	0.944	1.104	1.053	0.758	0.886	1.302	1.328	1.300
E.RIO TINTO	0.678	0.821	0.782	0.914	0.871	0.628	0.734	1.078	1.100	1.076
CEPSA -ORD.	0.579	0.701	0.667	0.781	0.744	0.536	0.626	0.920	0.939	0.919
PETROMED	0.979	1.185	1.128	1.320	1.258	0.906	1.059	1.556	1.587	1.553
A.HORNOS	0.212	0.257	0.245	0.286	0.273	0.197	0.230	0.338	0.344	0.337
TUBACEX	0.181	0.219	0.209	0.244	0.232	0.167	0.196	0.287	0.293	0.287
MOTOR IBER.	0.287	0.348	0.331	0.388	0.369	0.266	0.311	0.457	0.466	0.456
TELEFONICA	0.602	0.729	0.694	0.812	0.774	0.558	0.652	0.957	0.977	0.956

MATRIZ DE RELACION DE VALORES
relacion trimestral

	SEVILLANA	UNION-FENOS	AZUCARERA	ASLAND	VALDERRIVAS	DRAGADOS OR	VALLEHERM.O	HUARTE	GRAL.INVER.	POPULINSA A
B.BILBAO	1.413	1.761	1.697	1.360	1.169	1.594	1.733	3.720	1.202	2.272
B.CENTRAL	1.167	1.455	1.402	1.123	0.966	1.317	1.431	3.073	0.993	1.877
BANESTO	1.226	1.528	1.472	1.180	1.014	1.383	1.503	3.227	1.043	1.971
B.HISPANO	1.048	1.306	1.258	1.008	0.867	1.182	1.285	2.759	0.891	1.685
B.POPULAR	1.100	1.371	1.321	1.058	0.910	1.241	1.349	2.895	0.935	1.768
SANTAND.400	1.526	1.902	1.833	1.469	1.263	1.722	1.871	4.018	1.298	2.454
B.VIZCAYA	1.306	1.628	1.569	1.257	1.081	1.474	1.602	3.439	1.111	2.100
FECSA PQS.A	0.889	1.108	1.068	0.856	0.736	1.003	1.090	2.341	0.756	1.430
HIDROLA	0.871	1.086	1.046	0.838	0.721	0.983	1.068	2.294	0.741	1.401
IBERDUERO	0.890	1.110	1.069	0.857	0.737	1.005	1.092	2.345	0.758	1.432
SEVILLANA	1.000	1.247	1.201	0.962	0.823	1.128	1.226	2.633	0.851	1.608
UNION-FENOS	0.802	1.000	0.963	0.772	0.664	0.905	0.984	2.112	0.682	1.290
AZUCARERA	0.833	1.038	1.000	0.801	0.689	0.940	1.021	2.192	0.708	1.339
ASLAND	1.039	1.295	1.248	1.000	0.860	1.172	1.274	2.736	0.884	1.671
VALDERRIVAS	1.208	1.506	1.451	1.163	1.000	1.363	1.482	3.182	1.028	1.943
DRAGADOS OR	0.886	1.105	1.064	0.853	0.733	1.000	1.087	2.334	0.754	1.425
VALLEHERM.O	0.815	1.016	0.979	0.785	0.675	0.920	1.000	2.147	0.694	1.311
HUARTE	0.380	0.473	0.456	0.365	0.314	0.429	0.466	1.000	0.323	0.611
GRAL.INVER.	1.175	1.465	1.412	1.131	0.973	1.326	1.442	3.095	1.000	1.890
POPULINSA A	0.622	0.775	0.747	0.598	0.515	0.702	0.763	1.637	0.529	1.000
ESP.INVERS.	1.465	1.826	1.759	1.410	1.212	1.653	1.796	3.857	1.246	2.355
SARRIO PAP.	0.299	0.373	0.359	0.288	0.248	0.338	0.367	0.788	0.255	0.481
ENERGIAS	1.157	1.443	1.390	1.114	0.958	1.306	1.419	3.047	0.984	1.861
E.RIO TINTO	0.958	1.194	1.151	0.922	0.793	1.081	1.175	2.523	0.815	1.541
CEPSA -ORD.	0.818	1.020	0.982	0.787	0.677	0.923	1.003	2.154	0.696	1.315
PETROMED	1.383	1.724	1.661	1.331	1.144	1.560	1.696	3.641	1.177	2.224
A.HORNOS	0.300	0.374	0.360	0.289	0.248	0.339	0.368	0.790	0.255	0.483
TUBACEX	0.256	0.319	0.307	0.246	0.211	0.288	0.313	0.673	0.217	0.411
MOTOR IBER.	0.406	0.506	0.488	0.391	0.336	0.458	0.498	1.069	0.345	0.653
TELEFONICA	0.851	1.061	1.022	0.819	0.704	0.960	1.044	2.241	0.724	1.363

MATRIZ DE RELACION DE VALORES
relacion trimestral

	ESP.INVERS.	SARRIO PAP.	ENERGIAS	E.RIO TINTO	CEPSA -ORD.	PETROMED	A.HORNOS	TUBACEX	MOTOR IBER.	TELEFONICA
B.BILBAO	0.964	4.722	1.221	1.475	1.727	1.022	4.708	5.528	3.479	1.660
B.CENTRAL	0.797	3.901	1.009	1.218	1.427	0.844	3.890	4.567	2.874	1.372
BANESTO	0.837	4.096	1.059	1.279	1.498	0.886	4.084	4.796	3.018	1.440
B.HISPANO	0.715	3.502	0.905	1.094	1.281	0.758	3.492	4.100	2.580	1.231
B.POPULAR	0.751	3.675	0.950	1.148	1.344	0.795	3.664	4.303	2.708	1.292
SANTAND.400	1.042	5.100	1.319	1.593	1.866	1.103	5.085	5.971	3.758	1.793
B.VIZCAYA	0.892	4.365	1.129	1.363	1.597	0.944	4.352	5.110	3.216	1.535
FECSA PQS.A	0.607	2.971	0.768	0.928	1.087	0.643	2.962	3.478	2.189	1.045
HIDROLA	0.595	2.912	0.753	0.909	1.065	0.630	2.903	3.409	2.145	1.024
IBERDUERO	0.608	2.976	0.770	0.929	1.089	0.644	2.967	3.484	2.193	1.046
SEVILLANA	0.683	3.342	0.864	1.044	1.223	0.723	3.332	3.913	2.462	1.175
UNION-FENOS	0.548	2.681	0.693	0.837	0.981	0.580	2.673	3.139	1.975	0.943
AZUCARERA	0.568	2.783	0.720	0.869	1.018	0.602	2.775	3.258	2.050	0.979
ASLAND	0.709	3.473	0.898	1.085	1.270	0.751	3.463	4.066	2.559	1.221
VALDERRIVAS	0.825	4.039	1.044	1.261	1.477	0.874	4.027	4.728	2.976	1.420
DRAGADOS OR	0.605	2.962	0.766	0.925	1.084	0.641	2.953	3.468	2.182	1.042
VALLEHERM.O	0.557	2.725	0.705	0.851	0.997	0.590	2.717	3.190	2.008	0.958
HUARTE	0.259	1.269	0.328	0.396	0.464	0.275	1.266	1.486	0.935	0.446
GRAL.INVER.	0.803	3.929	1.016	1.227	1.437	0.850	3.917	4.599	2.895	1.381
POPULINSA A	0.425	2.078	0.537	0.649	0.760	0.450	2.072	2.433	1.531	0.731
ESP.INVERS.	1.000	4.896	1.266	1.529	1.791	1.059	4.881	5.731	3.607	1.721
SARRIO PAP.	0.204	1.000	0.259	0.312	0.366	0.216	0.997	1.171	0.737	0.352
ENERGIAS	0.790	3.868	1.000	1.208	1.415	0.837	3.856	4.528	2.850	1.360
E.RIO TINTO	0.654	3.202	0.828	1.000	1.171	0.693	3.193	3.749	2.359	1.126
CEPSA -ORD.	0.558	2.734	0.707	0.854	1.000	0.591	2.726	3.200	2.014	0.961
PETROMED	0.944	4.622	1.195	1.443	1.691	1.000	4.609	5.411	3.406	1.625
A.HORNOS	0.205	1.003	0.259	0.313	0.367	0.217	1.000	1.174	0.739	0.353
TUBACEX	0.174	0.854	0.221	0.267	0.312	0.185	0.852	1.000	0.629	0.300
MOTOR IBER.	0.277	1.357	0.351	0.424	0.496	0.294	1.353	1.589	1.000	0.477
TELEFONICA	0.581	2.844	0.735	0.888	1.040	0.615	2.836	3.329	2.095	1.000

MATRIZ DE RELACION DE VALORES
relacion semestral

	B.BILBAO	B.CENTRAL	BANESTO	B.HISPANO	B.POPULAR	SANTAND.400	B.VIZCAYA	FECSA POS.A	HIDROLA	IBERDUERO
B.BILBAO	1.000	1.313	1.298	12.335	1.308	0.897	1.070	0.873	0.762	0.767
B.CENTRAL	0.761	1.000	0.988	9.385	0.996	0.683	0.815	0.665	0.580	0.584
BANESTO	0.771	1.012	1.000	9.499	1.008	0.691	0.825	0.673	0.587	0.591
B.HISPANO	0.081	0.107	0.105	1.000	0.106	0.073	0.087	0.071	0.062	0.062
B.POPULAR	0.764	1.004	0.992	9.421	1.000	0.685	0.818	0.667	0.582	0.586
SANTAND.400	1.115	1.465	1.447	13.747	1.459	1.000	1.194	0.974	0.850	0.855
B.VIZCAYA	0.934	1.227	1.212	11.513	1.222	0.838	1.000	0.816	0.712	0.716
FECSA PQS.A	1.145	1.504	1.486	14.117	1.498	1.027	1.226	1.000	0.873	0.878
HIDROLA	1.312	1.724	1.703	16.175	1.717	1.177	1.405	1.146	1.000	1.006
IBERDUERO	1.304	1.713	1.692	16.072	1.706	1.169	1.396	1.138	0.994	1.000
SEVILLANA	1.368	1.797	1.776	16.867	1.790	1.227	1.465	1.195	1.043	1.049
UNION-FENOS	1.289	1.693	1.673	15.890	1.687	1.156	1.380	1.126	0.982	0.989
AZUCARERA	1.379	1.811	1.790	16.999	1.804	1.237	1.476	1.204	1.051	1.058
ASLAND	0.553	0.726	0.717	6.813	0.723	0.496	0.592	0.483	0.421	0.424
VALDERRIVAS	0.700	0.919	0.909	8.630	0.916	0.628	0.750	0.611	0.533	0.537
DRAGADOS OR	0.999	1.312	1.296	12.310	1.307	0.895	1.069	0.872	0.761	0.766
VALLEHERM.O	1.524	2.001	1.978	18.784	1.994	1.366	1.631	1.331	1.161	1.169
HUARTE	0.468	0.614	0.607	5.762	0.612	0.419	0.500	0.408	0.356	0.359
GRAL.INVER.	0.880	1.155	1.141	10.842	1.151	0.789	0.942	0.768	0.670	0.675
POPULINSA A	0.422	0.554	0.548	5.203	0.552	0.379	0.452	0.369	0.322	0.324
ESF.INVERS.	1.377	1.808	1.786	16.966	1.801	1.234	1.474	1.202	1.049	1.056
SARRIO PAP.	0.462	0.606	0.599	5.690	0.604	0.414	0.494	0.403	0.352	0.354
ENERGIAS	1.310	1.720	1.699	16.140	1.713	1.174	1.402	1.143	0.998	1.004
E.RIO TINTO	1.817	2.386	2.358	22.397	2.377	1.629	1.945	1.586	1.385	1.393
CEPSA -ORD.	1.121	1.472	1.454	13.812	1.466	1.005	1.200	0.978	0.854	0.859
PETROMED	1.441	1.892	1.869	17.756	1.885	1.292	1.542	1.258	1.098	1.105
A.HORNOS	1.061	1.394	1.377	13.082	1.389	0.952	1.136	0.927	0.809	0.814
TUBACEX	0.418	0.549	0.543	5.156	0.547	0.375	0.448	0.365	0.319	0.321
MOTOR IBER.	0.614	0.806	0.796	7.564	0.803	0.550	0.657	0.536	0.468	0.471
TELEFONICA	1.791	2.351	2.323	22.069	2.342	1.605	1.917	1.563	1.364	1.373

MATRIZ DE RELACION DE VALORES
relacion semestral

	SEVILLANA	UNION-FENOS	AZUCARERA	ASLAND	VALDERRIVAS	DRAGADOS OR	VALLEHERM.O	HUARTE	GRAL.INVER.	POPULINSA A
B.BILBAO	0.731	0.776	0.725	1.809	1.428	1.001	0.656	2.139	1.137	2.369
B.CENTRAL	0.556	0.591	0.552	1.379	1.088	0.762	0.500	1.629	0.866	1.804
BANESTO	0.563	0.598	0.559	1.394	1.101	0.772	0.506	1.648	0.876	1.825
B.HISPANO	0.059	0.063	0.059	0.147	0.116	0.081	0.053	0.174	0.092	0.192
B.POPULAR	0.559	0.593	0.554	1.383	1.092	0.765	0.502	1.635	0.869	1.811
SANTAND.400	0.815	0.865	0.809	2.018	1.593	1.117	0.732	2.386	1.268	2.643
B.VIZCAYA	0.683	0.725	0.677	1.690	1.334	0.935	0.613	1.998	1.062	2.213
FECSA POS.A	0.837	0.888	0.830	2.072	1.636	1.147	0.752	2.450	1.302	2.713
HIDROLA	0.959	1.018	0.952	2.374	1.874	1.314	0.861	2.807	1.492	3.109
IBERDUERO	0.953	1.011	0.945	2.359	1.862	1.306	0.856	2.789	1.482	3.089
SEVILLANA	1.000	1.061	0.992	2.476	1.955	1.370	0.898	2.927	1.556	3.241
UNION-FENOS	0.942	1.000	0.935	2.333	1.841	1.291	0.846	2.758	1.466	3.054
AZUCARERA	1.008	1.070	1.000	2.495	1.970	1.381	0.905	2.950	1.565	3.267
ASLAND	0.404	0.429	0.401	1.000	0.789	0.553	0.363	1.182	0.628	1.309
VALDERRIVAS	0.512	0.543	0.508	1.267	1.000	0.701	0.459	1.498	0.796	1.658
DRAGADOS OR	0.730	0.775	0.724	1.807	1.426	1.000	0.655	2.136	1.135	2.366
VALLEHERM.O	1.114	1.182	1.105	2.757	2.177	1.526	1.000	3.260	1.732	3.610
HUARTE	0.342	0.363	0.339	0.846	0.668	0.468	0.307	1.000	0.531	1.107
GRAL.INVER.	0.643	0.682	0.638	1.592	1.256	0.881	0.577	1.882	1.000	2.084
POPULINSA A	0.309	0.327	0.306	0.764	0.603	[illegible]	0.277	0.903	0.480	1.000
ESP.INVERS.	1.006	1.068	0.998	2.490	1.966	1.378	0.903	2.944	1.565	3.261
SARRIO PAP.	0.337	0.358	0.335	0.835	0.659	0.462	0.303	0.987	0.525	1.093
ENERGIAS	0.957	1.016	0.949	2.369	1.870	1.311	0.859	2.801	1.489	3.102
E.RIO TINTO	1.328	1.409	1.317	3.288	2.595	1.819	1.192	3.887	2.066	4.304
CEPSA -ORD.	0.819	0.869	0.812	2.027	1.601	1.122	0.735	2.397	1.274	2.654
PETROMED	1.053	1.117	1.044	2.606	2.058	1.442	0.945	3.081	1.638	3.412
A.HORNOS	0.776	0.823	0.770	1.920	1.516	1.063	0.696	2.270	1.207	2.514
TUBACEX	0.342	0.324	0.303	0.757	0.598	0.419	0.274	0.895	0.476	0.981
MOTOR IBER.	0.448	0.476	0.445	1.110	0.877	0.614	0.403	1.313	0.698	1.454
TELEFONICA	1.308	1.389	1.298	3.239	2.557	1.793	1.175	3.830	2.035	4.241

MATRIZ DE RELACION DE VALORES
relacion semestral

	ESP.INVERS.	SARRIO PAP.	ENERGIAS	E.RIO TINTO	CEPSA -ORD.	PETROMED	A.HORNOS	TUBACEX	MOTOR IBER.	TELEFONICA
B.BILBAO	0.726	2.166	0.764	0.550	0.892	0.694	0.942	2.390	1.629	0.558
B.CENTRAL	0.553	1.649	0.581	0.419	0.679	0.529	0.717	1.820	1.241	0.425
BANESTO	0.560	1.669	0.589	0.424	0.688	0.535	0.726	1.842	1.256	0.430
B.HISPANO	0.059	0.176	0.062	0.045	0.072	0.056	0.076	0.194	0.132	0.045
B.POPULAR	0.555	1.656	0.584	0.421	0.682	0.531	0.720	1.827	1.246	0.427
SANTAND.400	0.810	2.416	0.852	0.614	0.995	0.774	1.051	2.666	1.817	0.623
B.VIZCAYA	0.679	2.023	0.713	0.514	0.834	0.648	0.880	2.233	1.522	0.522
FECSA POS.A	0.832	2.481	0.875	0.630	1.022	0.795	1.079	2.738	1.866	0.640
HIDROLA	0.953	2.843	1.002	0.722	1.171	0.911	1.236	3.137	2.138	0.733
IBERDUERO	0.947	2.825	0.996	0.718	1.164	0.905	1.229	3.117	2.125	0.728
SEVILLANA	0.994	2.964	1.045	0.753	1.221	0.950	1.289	3.271	2.230	0.764
UNION-FENOS	0.937	2.793	0.985	0.710	1.150	0.895	1.215	3.082	2.101	0.720
AZUCARERA	1.002	2.988	1.053	0.759	1.231	0.957	1.299	3.297	2.247	0.770
AGLAND	0.402	1.197	0.422	0.304	0.493	0.384	0.521	1.321	0.901	0.309
VALDERRIVAS	0.509	1.517	0.535	0.385	0.625	0.486	0.660	1.674	1.141	0.391
DRAGADOS OR	0.726	2.163	0.763	0.550	0.891	0.693	0.941	2.387	1.627	0.558
VALLEHERM.O	1.107	3.301	1.164	0.839	1.360	1.058	1.436	3.643	2.483	0.851
HUARTE	0.340	1.013	0.357	0.257	0.417	0.325	0.440	1.118	0.762	0.261
GRAL.INVER.	0.639	1.906	0.672	0.484	0.785	0.611	0.829	2.103	1.433	0.491
POPULINSA A	0.307	0.914	0.322	0.232	0.377	0.293	0.398	1.009	0.688	0.236
ESP.INVERS.	1.000	2.982	1.051	0.758	1.228	0.956	1.297	3.290	2.243	0.769
SARRIO PAP.	0.335	1.000	0.353	0.254	0.412	0.320	0.435	1.104	0.752	0.258
ENERGIAS	0.951	2.837	1.000	0.721	1.169	0.909	1.234	3.130	2.134	0.731
E.RIO TINTO	1.320	3.936	1.388	1.000	1.622	1.261	1.712	4.344	2.961	1.015
CEPSA -ORD.	0.814	2.427	0.856	0.617	1.000	0.778	1.056	2.679	1.626	0.626
PETROMED	1.047	3.121	1.100	0.793	1.286	1.000	1.357	3.444	2.347	0.805
A.HORNOS	0.771	2.299	0.811	0.584	0.947	0.737	1.000	2.537	1.729	0.593
TUBACEX	0.304	0.906	0.319	0.230	0.373	0.290	0.394	1.000	0.682	0.234
MOTOR IBER.	0.446	1.329	0.469	0.338	0.548	0.426	0.578	1.467	1.000	0.343
TELEFONICA	1.301	3.879	1.367	0.985	1.593	1.243	1.687	4.280	2.918	1.000

Siguiendo la metodología expuesta anteriormente, vamos a establecer el autovalor máximo de cada matríz -trimestral y semestral- y los autovectores de probabilidades asociados. Las componentes de los autovectores como ya se ha señalado serán las probabilidades subjetivas de invertir en cada valor.

5.4.4.- Obtención del autovector de probabilidades.

Dada la naturaleza del problema, como hemos convenido en asignar la relación de comparación entre las probabilidades de los distintos valores, mediante el cociente de las rentabilidades de dichos valores, entonces las matrices -trimestral y semestral- son consistentes. Esta condición de consistencia nos lleva a que el autovalor máximo sea en ambos casos igual al número de filas (igual al número de columnas).

$$\lambda \text{ máx} = 30$$

Los autovectores, correspondientes a las matrices de relación -trimestral y semestral- asociados al autovalor λ máx = 30 son respectivamente:

a) Autovector de probabilidades correspondiente a la matriz trimestral.

B. Bilbao	0.0502832
B. Central	0.041562
Banesto	0.0436255
B. Hispano	0.0372987
B. Popular	0.0391481
B. Santander	0.0543323
B. Vizcaya	0.0464871
FECSA	0.0316533
Hidrola	0.0310109
Iberduero	0.0316922
Sevillana	0.0356051
Unión-Fenosa	0.028558
Azucarera	0.0296482
Asland	0.0369872
Valderribas	0.043022
Dragados	0.0315559
Vallehermoso	0.0290252
Huarte	0.0135295
General de Inversiones	0.041854
Popularinsa	0.0221339
Española de Inversiones	0.052152
Sarrió	0.0106484
Energías	0.0411921
Explosivos Rio Tinto	0.0341061

CEPSA	0.0291226
Petromed	0.049232
Altos Hornos	0.0106873
Tubacex	0.009091
Motor Ibérica	0.0144639
Telefónica	0.0302902

El autovector está normalizado para que la suma de sus componentes sea 1 . Dichas componentes son las probabilidades subjetivas de invertir en cada valor.

b) <u>Autovector de probabilidades correspondiente a la matriz de relación semestral.</u>

B. Bilbao	0.0331308
B. Central	0.025234
Banesto	0.0255309
B. Hispano	0.0026916
B. Popular	0.0253329
B. Santander	0.0369505
B. Vizcaya	0.0309537
FECSA	0.0379599
Hidrola	0.0434817
Iberduero	0.0432046
Sevillana	0.045342
Unión-Fenosa	0.0427098
Azucarera	0.0456983

Asland	0.018307
Valderribas	0.0231955
Dragados	0.0330912
Vallehermoso	0.0504878
Huarte	0.0154966
General de Inversiones	0.0291527
Popularinsa	0.0139925
Española de Inversiones	0.0456191
Sarrió	0.0152987
Energías	0.0433827
Explosivos Rio Tinto	0.0603054
CEPSA	0.0371286
Petromed	0.0477368
Altos Hornos	0.0351693
Tubacex	0.0138539
Motor Ibérica	0.0203257
Telefónica	0.0593346

Observemos que la probabilidad de invertir en el Hispano es 0.0372984 con un horizonte trimestral, y de 0.0026916 con un horizonte semestral, esto es debido a que a partir del 7 de diciembre de 1984 se inicia una caída en picado de las cotizaciones de dicho banco, ya que por la crisis financiera que tiene el Hispano, este anuncia por esas fechas que no repartirá dividendos. Por esta razón se explica lo reflejado en la tabla de cotizaciones, y puesto que la caida se inicia en la sesión número noventa y siete de la tabla, las rentabilidades calculadas en un periodo de sesenta sesiones no recogían esta caída, por tanto tenían fluctuaciones normales, y eran rentabilidades mayores, lo que hace que la rentabilidad trimestral del valor sea -2.39521 , sin embargo la rentabilidad semestral es -25.90909 ya que las rentabilidades calculadas en un período de 120 sesiones recogen dicha caída desde la primera rentabilidad calculada. Por tanto, esto explica que los elementos de la columna del Hispano en la matriz semestral (como cociente de rentabilidades) sean anormalmente grandes, y que exista esa diferencia entre las probabilidades calculadas con un horizonte trimestral y semestral.

También podemos decir, al observar los dos autovectores deducidos de las matrices trimestral y semestral, que para los valores cuyas probabilidades, a más largo plazo disminuyan, tendría más riesgo el hacer inversiones en ellos de éste tipo -es decir con un periodo horizonte ámplio- .

En la exposición teórica del método del autovalor habíamos indicado que tenía especial interés porque permitía introducir valoraciones inexactas o ambiguas, es decir, pequeñas inconsistencias, a la hora de establecer las relaciones comparativas como elementos de la matriz.

En el caso de plantear un problema cuya matriz de comparaciones es consistente, como el propuesto aquí, habría otras alternativas para calcular directamente el autovector. Pero nuestro interés fundamental estaba en mostrar la metodología con un caso prácico como hemos hecho. Dejamos pues el campo abierto para aplicar este método a problemas con planteamientos que generen matrices inconsistentes.

NOTAS AL CAPITULO V.

(1) R. V. BROOWN, A. S. KAHAN y C. PETERSON. Decision analysis for the manager. New York. Holt Rinehart and Winston. 1974.

(2) R. M. HOGARTH. "Cognitive processes and the assessment of subjective probability distributions". Journal of The American Statistical Assotiation. 1975. vol. 70, pp. 271-289.

(3) R. SCHLAIFER. Analysis of decision under uncertainty. New York. Mc Graw-Hill, 1969.

(4) T. L. SAATY. An eigenvalue allocation model in contingency planning. University of Pennsylvania, 1972.

- "Measuring the fuzzines of sets". Journal of cybernetics, 1974, vol. 4 pp. 53-61.

- "A Scaling method for priorities in hierarchical structures", Journal of Mathematical Psychology, 1977, vol. 15, pp. 234-281.

- "Exploring the interface between hierarchies, multiple objects and fuzzy sets", Fuzzy Sets and Systems, 1978, vol. 1, pp: 57-68.

(5) R. R. YAGER. "Multiple objective decision making using fuzzy sets". International Journal of Man-Machine Studies, 1977, vol. 9 , pp. 375-382.

(6) T. L. SAATY y M. KHOUJA. "A measure of world influence". Journal of Peace Science, 1976, vol. 2 pp: 31-48.

(7) V. WADE y R.R. YAGER. "Comparison of methods for eliciting finite subjective probabilities". Proceedings of the 1977 AIDS National Conference, Chicago, 1977, pp: 414-416.

(8) V. WADE. Three methods for eliciting subjective probabilities. Masters thesis, Iona College, New Rochelle, New York. 1977.

C O N C L U S I O N E S

Una vez llegados a este punto, concluído el núcleo central del trabajo, debemos recapitular para comprobar si las aspiraciones que motivaron esta tesis doctoral han obtenido respuestas eficaces a lo largo de la exposición que con estas conclusiones finalizamos.

Al redactar estas conclusiones nos proponemos un doble objetivo: por un lado, resaltar aquellas cuestiones que son fundamentales en cada uno de los cinco capítulos que componen este trabajo para concluir la línea general de nuestra investigación, y por otra parte, significar aquellas cuestiones que, una vez concluido el trabajo, constituyen motivos importantes de reflexión respecto al tema tratado.

Gran parte del núcleo de esta tesis, como ha podido observarse durante su lectura, ha sido la compilación de unos datos históricos-conceptuales primero, y de unas axiomáticas del tema que nos ocupa más tarde, para satisfacer el objetivo planteado en la introducción. Por último hemos propuesto una metodología para determinar probabilidades subjetivas. De esta propuesta metodológica y de su aplicación práctica, en el caso desarrollado en el apartado 5.4 de este trabajo, se deducen evidentemente conclusiones válidas o, al menos, motivo de reflexión.

En cualquier trabajo de esta índole, el objetivo de estas conclusiones supone la necesidad de comunicar al lector las reflexiones del doctorando, pero éste siempre espera que, durante la lectura de su trabajo, pueda ser el propio lector -la mayoría de las veces más avisado que el doctorando o en, cualquier caso, desde una perspectiva más distante- el que saque las suyas propias, enriqueciendo de este modo el trabajo y, en definitiva, llevando realmente a la práctica ese sentido social que proponíamos en la introducción, de forma que esa utilización del "nosotros" tenga verdadero sentido.

Comenzaremos por resaltar algunas cuestiones, quizá conocidas pero no por ello menos importantes, del contenido de los tres primeros capítulos de este trabajo.

a) La probabilidad subjetiva, tal y como ha quedado reflejado en el capítulo I, es la más adecuada para medir la incertidumbre de los sucesos que se presentan en los procesos de elaboración de decisiones, que por no ser sucesos repetibles y no poder considerarse equiprobables no podemos aplicarles las teorías clásica y frecuencial. Por otra parte, tampoco es factible aplicar a dichos sucesos la teoría logicista sobre la determinación de la probabilidad, ya que el decisor que ha de asignar las probabilidades a los sucesos que ocurren en el marco de la elaboración de decisiones, no es una persona "idealmente racional" que enjuicia desde la más "absoluta imparcialidad" como propone esta teoría.

b) En el estudio de las otras concepciones de la probabilidad es claro que su aplicabilidad depende del contexto del problema planteado. La teoría clásica sólo podemos aplicarla para los sucesos en los que inicialmente aceptamos la indiferencia respecto a la probabilidad de aparición de los sucesos elementales. Esta cuestión es muy restrictiva para cualquier fenómeno que observemos en la realidad. Sólo la aplicaremos para aquellas situaciones que aún sabiendo que pueden presentar algún sesgo planteemos su resolución aceptando ese comportamiento ideal que supone el principio de equiprobabilidad de los sucesos elementales.

c) Sólo tiene sentido aplicar la teoría frecuencial para aquellos fenómenos que puedan ser experimentados, es decir, aquellos cuyas concreciones sean repetibles. Por tanto, la teoría frecuencial resolverá la objeción planteada a la teoría clásica respecto a las posibles situaciones de sesgamiento, ya que estas quedarían detectadas con la experimentación. Aunque esta teoría resuelve dicho problema, sin embargo, es restrictiva para la medición de la incertidumbre de algunos sucesos, ya que lleva implícita la experimentación del fenómeno y teoricamente supone la aceptación del principio de regularidad estadística.

d) La teoría logicista es inflexible en sus planteamientos. Por ello, su aplicación resulta complicada, ya que parte del supuesto de la existencia de un pensador ideal y absolutamente racional que sabe elaborar la función de confirmación que relaciona perfectamente hipótesis y experiencia, y esta función tiene problemas de medibilidad. Este marco inflexible que no deja lugar a la intuición, aunque sea intuición racional basada en unos esquemas (como ocurre con la concepción subjetiva) no deja paso a la credibilidad real del individuo en esas situaciones. Por tanto, su aplicación es prácticamente imposible para medir la incertidumbre de los sucesos implicados en situaciones de decisión, como hemos señalado antes.

e) La concepción subjetiva, por no tener que aceptar la equiprobabilidad de los sucesos elementales posibles, ni tener que admitir el principio de regularidad estadística, es la más adecuada para medir la incertidumbre de los sucesos que ocurren en los procesos de decisión. No obstante, el decisor o experto, en el momento de asignar la probabilidad subjetiva puede incorporar alguna información frecuencial o de otro tipo.

Los esquemas de coherencia que ha de seguir la asignación de la probabilidad subjetiva hacen que ésta cumpla los axiomas de la teoría matemática de la probabilidad. Dichos esquemas de coherencia del comportamiento racional admiten que las probabilidades valoradas por dos personas distintas sean igualmente "buenas" siempre que sean consistentes con el resto de sus valoraciones.

*_*_*_*_*_*_*_*

También es importante resaltar algunas cuestiones fundamentales de la parte histórica de la teoría de la probabilidad tratada en este trabajo.

- Los inicios de la teoría de la probabilidad surgen por simples problemas de juegos. Por un deseo de "controlar" el azar incontrolable, o por lo menos hacerlo menos incontrolable.

Los primeros iniciadores plantean cuestiones particulares con las que pretenden resolver determinados problemas que se les presentan, sobre todo en cuestiones de juegos. Para resolver estos problemas, los pioneros sólo cuentan con los recursos del cálculo de variaciones y combinaciones, que les permitan determinar la probabilidad de que ocurran determinados resultados en el juego, para poder controlar sus pérdidas o ganancias. Este planteamiento fué evolucionando -según se van complicando los problemas planteados- y algunos matemáticos de los siglos XVII y XVIII, como James Bernoulli, De Moivre y Bayes, establecen importantes formulaciones generales. Bernouilli, con su teorema que crea la base de la teoría frecuencial, De Moivre, con su importante aportación de la aproximación de la distribución binomial a la normal, y Bayes, con su formulación de la probabilidad inversa, son las piezas claves sin las cuales hoy no podríamos concebir las modernas teorías de la probabilidad. El paso siguiente, como queda expuesto en estos capítulos, lo dará Laplace con el desarrollo de la teoría de la probabilidad inversa de Bayes. Aportación fundamental para la teoría subjetivista en tanto en cuanto, a partir de ella, los teóricos de la probabilidad quedarán divididos en dos grandes escuelas: Clásica y Bayesiana, siendo precisamente de esta última escuela de donde surgirá la teoría subjetiva.

--*-*-*-*-*-*

Respecto al tema central de esta tesis, esto es, respecto a los fundamentos de la propia teoría subjetiva, exponemos aquí las cuestiones fundamentales que han ido surgiendo a lo largo del trabajo.

a) Las axiomáticas sobre la teoría de la probabilidad subjetiva y los distintos métodos sobre el modo de valorar las probabilidades, lo que procuran, en definitiva, es acercarse a la objetividad. De hecho, si las probabilidades objetivas son conocidas, ambas probabilidades -subjetiva y objetiva- coinciden. Los axiomas expuestos buscan la coherencia que les haga cumplir las leyes de la teoría matemática de la probabilidad y ciertas condiciones del comportamiento racional. Los métodos de valoración proporcionan aspectos y formulaciones que recojan toda la información disponible. En este caso, es claro que cuanto más y mejor información disponible obtengamos, tanto más nos acercaremos a la objetividad. En definitiva, podemos concluir que en el tratamiento individual de la valoración de la probabilidad subjetiva es necesario que el individuo al incorporar nueva información actualice su grado de creencia, y en el caso de las valoraciones de grupo, los distintos métodos matemáticos y behavioristas, exigen la búsqueda del consenso para que éste conduzca a una asignación única de la probabilidad por parte del grupo.

b) En todas las axiomáticas estudiadas se observa con claridad la influencia que en ellas tuvieron los cuatro axiomas de De Finetti. Por más distantes que éstas estuvieran en el tiempo o por más significativamente distintas que fueran entre ellas, como es el caso de las de Koopman, Anscombe y Aumann con la de Suppes o la de Scott, todas recogen explícita o implícitamente estos cuatro axiomas. En definitiva, los axiomas de De Finetti constituyen la primera y fundamental base cualitativa para el desarrollo de la teoría de la probabilidad subjetiva, convirtiéndose entonces estos cuatro axiomas en las condiciones que ha de cumplir una relación entre sucesos para que sea considerada una probabilidad cualitativa.

c) Y, si todas las axiomáticas han sido influidas por los postulados de De Finetti, en mayor medida lo fué Savage, cuya axiomática podemos considerarla como la más completa por varias razones: primero, por la utilización que hace de la teoría de la decisión para la formulación de su axiomática, con la que establece un orden parcial entre las acciones que implicará una relación de la misma forma entre las consecuencias de las distintas acciones. De esta relación deducirá una nueva relación "no más probable que" entre los sucesos que es una probabilidad cualitativa. De esta forma Savage pone en juego todos los elementos que realmente estarán implicados en un proceso de decisión. En segundo lugar, por el uso que este autor hace de la teoría de la utilidad de Von Neumann y Morgenstern, que le permite establecer un teorema para demostrar la existencia de una función de probabilidas subjetiva P sobre el conjunto de los sucesos -estados de la naturaleza- .

El teorema referido demuestra que se genera una función de probabilidad subjetiva que determina el grado de creencia, en el estado verdadero de la naturaleza. La expectativa (esperanza matemática) de una decisión se define respecto a la función de probabilidad subjetiva sobre los estados de la naturaleza y a la función de utilidad sobre el conjunto de las consecuencias. La acción preferida será aquella que maximice la utilidad esperada. En consecuencia las probabilidades, implícitas en la formulación de la tesis de dicho teorema, se determinarán de tal manera -si el individuo establece de la forma referida sus preferencias entre las acciones- que sean consistentes con el objetivo de maximizar la utilidad esperada.

Por tanto, podemos decir que, al menos, teóricamente Savage no deja ningún cabo sin atar, aunque luego su teoría tenga algunas objeciones en la práctica.

d) La teoría de la utilidad de Von Neumann-Morgenstern es fundamental tanto por la utilización que de ella hace Savage como por la posterior utilización que otros autores como Anscombe y Aumann realizan también a partir de ella. Lo mismo sucede con Fisburn quien establece una distribución de probabilidad teórica sobre un conjunto de sucesos usando también el modelo de utilidad esperada.

e) Una innovación importante para la probabilidad cualitativa es proporcionada por Villegas, que comienza definiendo una estructura de σ-álgebra de probabilidad cualitativa requiriendo para ello que la probabilidad cualitativa sea monótona continua; proporcionando una condición necesaria y suficiente para la existencia de una medida de probabilidad P compatible con la probabilidad cualitativa para que P sea numerablemente aditiva. Ambos resultados a los que llega Villegas constituyen una novedad destacable en la evolución de la teoría de la probabilidad.

f) Los sucesos arbitrarios tienen una medida de probabilidad inexacta que se establece en función de la medida de probabilidad de unos sucesos de referencia. Y hacer esta afirmación es posible gracias a la estructura de medida aproximada finita que propone Suppes.

*_*_*_*_*_*_*_*

Para finalizar estas conclusiones haremos referencia ahora a algunas cuestiones sobre el último punto de los tratados en este trabajo, esto es, sobre la metodología propuesta para extraer las probabilidades subjetivas de un decisor. Estas, desde nuestro punto de vista, serían:

a) Cuando se le plantea al decisor una situación en la que el número de sucesos implicados es relativamente grande, es muy difícil además de poco fiable, que este pueda asignar directamente probabilidades subjetivas a esos sucesos. La propuesta para solucionar este problema es que el decisor compare por cociente parejas de probabilidades, situación múcho más razonable de afrontar. De esta manera, se generan las probabilidades mediante un proceso más asequible para el decisor y más adecuado para plasmar sus expectativas. Este proceso se basaría en una metodología conveniente como la expuesta en el capítulo V.

b) La gran ventaja de esta metodología es que no exige al decisor una respuesta concreta, sino que proporcione la información que tenga acerca de la situación a la que se enfrenta. A la vez esta metodología contempla un mecanismo para recoger las respuestas ambiguas del decisor, cuestión que en el terreno de la subjetividad donde nos estamos moviendo es de una importancia capital.

c) Con la exposición de esta metodología hemos mostrado que la asignación de la probabilidad subjetiva, aparte de estar "controlada" teóricamente por unas axiomáticas que establecen como ha de ser el comportamiento coherente y racional del individuo, en la práctica no deja al "individuo real" con una situación confusa y complicada de resolver, sino que aporta métodos aplicables, bien por el decisor, o en muchas ocasiones por un técnico, que ajustándose a las normas del comportamiento coherente resuelven el problema de la asignación de probabilidades de una forma clara y precisa, incluso con una medida de la fiabilidad del vector de probabilidades calculado.

d) Con el caso práctico expuesto se ha puesto de manifiesto que, cuando la situación a la que se enfrenta el decisor es algo compleja, es absolutamente necesaria una metodología -la propuesta u otra de las existentes- para determinar las probabilidades subjetivas correspondientes a cada uno de los sucesos posibles, puesto que:

- El decisor no es capaz de enfrentarse a todos los sucesos presentados a la vez, para asignar directamente sus probabilidades respectivas.

- Las axiomáticas del comportamiento coherente no son suficientes para que el decisor resuelva en la práctica el problema, cuando este es algo complejo, como ha podido observarse con el planteado en este trabajo.

e) El cálculo del vector de probabilidades en el problema resuelto en esta tesis -o para otros problemas similares- es una información importante para el decisor, que en este caso ha de decidir si invierte o no en Bolsa y en qué valores. En este caso concreto el decisor, además de la información probabilistica calculada, puede incorporar otro tipo de información de última hora para tomar finalmente su decisión.

B I B L I O G R A F I A

Antes de reseñar la bibliografía específica utilizada en esta tesis doctoral, es necesario señalar algunos aspectos de carácter formal:

- Las obras consultadas sobre METODOLOGIA DE LA INVESTIGACION CIENTIFICA se reseñan por separado bajo ese epígrafe y antes de la BIBLIOGRAFIA ESPECIFICA.

- Todas las obras consultadas que tengan carácter unitario -en forma de libro o folleto de más de 50 páginas- se reseñarán subrayadas; no así aquellos artículos monograficos que aparezcan en revistas u obras de carácter periódico, que se reseñarán entrecomillados.

- Se hará constar en cada referencia la edición que ha sido consultada con su fecha correspondiente señalando en algunas ocasiones la primera edición, cuando ésta sea conocida para nosotros.

- Cuando se trate de un trabajo de investigación no publicado (tesis o tesina) se hará referencia expresa de su carácter y se reseñarán subrrayados por su carácter unitario.

I.- Bibliografía sobre METODOLOGIA DE LA INVESTIGACION CIENTIFICA.

BUNGE, Mario

La investigación científica. Su estratégia y filosofía.

Ariel, Barcelona 1979.

ECO, Umberto

Como se hace una tesis. Técnicas y procedimiento de investigación, estudio y escritura.

Gedisa. Barcelona 1982.

POPPER, Karl R.

La lógica de la investigación científica.

Tecnos, Madrid 1977.

ROMANO, David

Elementos y técnica de trabajo científico.

Teide, Barcelona 1983.

VIVES, José

Normas de metodología para el trabajo científico.

C.S.I.C. Instituto P. Enriquez Flórez, Madrid 1967.

II.- BIBLIOGRAFIA ESPECIFICA.

ALLAIS, Maurice

"Le comportement de l'home rational devant le risque: Critique des postulats et axioma de l'école Americaine". Econometrica, 1953, vol. 21, nº 4, pp: 503-546.

ANSCOMBE, Francis J.

"Bayesian Statistics".
American Statistician, 1961, vol. 15, nº 1, pp: 21-24.

ANSCOMBE, F. J. y **AUMANN**, R. J.

"A definition of subjective probability"
Annals of Mathematical Statistics, 1963, vol. 34, pp: 199-205.

ARCHIBALD, G. C.

"Utility, risk and linearity".
Journal of Political Economy, 1959, vol. 67, nº 5, pp: 437-450.

ARMSTRONG, W. E.

"Uncertainty and utility function".
The Economic Journal, 1948, vol. 58, nº 229, pp: 1-10.

ARNAIZ VELLANDO, Gonzalo

Introducción a la estadistica teórica.

Ed. Lex Nova, Valladolid, 1978.

ARROW, K. J.

- "Alternative approaches to the theory of choice in risk-taking situation".
  Econometrica, 1951, vol. 19, pp: 404-437.

- "Utilities, attitudes, choices: a review note".
  Econometrica, 1958, vol. 26, pp: 1-23.

AUMANN, Robert J.

"Agreeing to disagree".

The Annals of Statistics, 1976, vol. 4, nº 6, pp: 1236-1239.

AYER, Alfred J.

Probability and evidence

Columbia University Press, 1979 (1ª ed. Macmillan 1972).

BACHARACH, Michael

"Normal Bayesian dialogues".

Journal of the American Statistical Association, 1979, vol. 74, nº 368, pp: 837-846.

BARR, D. R. y RICHARDS, F. R.

"Induced priors in decision problems".

The Annals of Statistics, 1977, vol. 5, nº 1, pp: 182-184.

BAUMOL, William J.

"The Neumann-Morgenstern utility index an ordinalist view".

Journal of Political Economy, 1951, vol. 59, pp: 61-66.

BAYES, Thomas

"An essay toward solving a problem in the doctrine of chances: with a biographical note by G. A. Barnard".

Biometrika, 1958, vol. 45, pp: 293-315.

BECKER, G. M.

"Decision making: objective measures of subjective probability and utility".

Psychological Review, 1962, vol. 69, pp: 136-148.

BERNOULLI, Daniel

"Specimen theoriae novae de mensura sortis".

Comentarii academiae scientarum imperialis Petropolitanae, 1738, vol. 5, pp: 175-192 (Traducido por L. Sommer en Econometrica, 1954, vol. 22, pp: 23-36).

BERNOULLI, James

Ars Conjectandi

Basilea, 1713.

BIRNBAUM; Allan

"Concepts of statistical evidence".

En Essays in honor of Ernest Nagel, eds. Sidney Morgenbesser, Patrick Suppes and Morton Withe, St. Martin's Press, New York, 1969.

BLACK, Max

Inducción y probabilidad

Ed. Cátedra, Madrid, 1979.

BLACKWELL, David y DUBINS, Lester

"Merging of opinions with increasing information".

Annals of Mathematical Statistics, 1962, vol. 33, pp: 882-887.

BLUM, Julius y ROSENBLATT; Judah

"on partial a priori information in statistical inference"

Annals of Mathematical Statistics, 1967, vol. 38, pp: 1671-1678.

BOLKER, Ethan

"A simultaneous axiomatization of utility and subjective probability".

Philosophy of Science, 1967, vol. 34, pp: 333-340.

BONHERT, H.

"The logical structure of the utility concept".

en <u>Decision processes,</u> por Thral, R. M., Coombs, C. H. y Davis, R. L. (eds.), John Wiley and Sons, New York, 1957.

BORCH, Karl Henrik

<u>La economía de la incertidumbre</u>

Tecnos, Madrid 1977 (1ª ed. Princeton University Press 1968).

BOREL, Emile

"A propos d'un traité de probabilités".

Revue Philosophique, 1924, vol. 98, pp: 321-336.

BOUDOT, Maurice

<u>Lógica inductiva y probabilidad</u>

Paraninfo, Madrid 1979.

BOX, George y **TIAO**, G. C.

"A further look at robustness via Bayes's theorem".

Biometrika, 1962, vol. 49, pp: 419-433.

BROWN, Rex

"Measuring uncertainty in business investigations with special reference to market research".

The Journal of management studies, 1964, vol. 1, nº 2 pp: 143-163.

BROWN, R. V., **KAHAN**, A. S., y **PETERSON**, C.

<u>Decision analysis for the manager.</u>

Holt, Rinehart and Winston. New York, 1974.

BUNN, Derek W.

"A perspective on subjective probability for prediction and decision".

Technological forecasting and social change, 1979, vol. 14, pp: 39-45.

CARNAP, Rudolf

- "Probability as a guide in life".
  Journal of Philosophy, 1947, vol. 64.

- "Logical Foundations of probability".
  The University of Chicago Press, Chicago, 1950.

- "The aim of inductive logic".
  en <u>Logic, methodology and philosophy of science,</u> Nagel, E. Suppes, P. and Tarski, A. (eds.). Stanford University Press, Stanford (California), 1962, pp: 303-318.

CÉRÉSOLE, Pierre

"L'irreductibilité de l'intuition des probabilités et l'existence de propositions mathématique indémontrables".

Archives de Psychologie, 1915, vol. 15, pp: 255-305.

CHAMBERS, Michael L.

"A simple probleme with strikingly different frecuentist and bayesian solutions".

Journal of the Royal Statistical Society, serie B, 1970 vol. 32, nº 2, pp: 278-282.

CHIPMAN, John S.

- "Stochastic choice and subjective probability". en Dorothy Willher (ed.) <u>Decisions values and groups.</u> vol. I, Pergamon Press, New York, 1960, pp: 70-95.

- "The foundations of utility". Econometrica, 1960, vol. 28, nº 2, pp: 193-224.

CHURCHMAN, C.

<u>Prediction and optimal decision</u>

Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1961.

CLARKE, R. D.

"The concept of probability".

Journal of the institute of actuaries, 1954, vol. 80, pp: 1-13.

COHEN, J, and HAMSEL, C. E. M.

Risk and gambling, the study of subjective probability.

Philosophical Library, New York, 1956.

COOMBS, C. H. y BEARDSLEE, D. C.

"On Decision-making under uncertainty".

en R. M. Thrall, C. H. Coombs y R. L. Davis (eds.) Decision processes, Wiley, New York, 1954, pp: 255-286.

COOMBS, C. H. , GRENBERG, M. y ZINNES, J. L.

"A double law of comparative judgement for the analysis of preferential choice and similarities data".

Psychometrica, 1961, vol. 26, pp: 165-171.

CORNFIELD, Jerome

"The bayesian outlook and its applications".

Biometrics, 1969, vol. 25, pp: 617-642.

COSTA REPARAZ, Emilio

Elaboración de decisiones en el análisis económico: aproximación metodológica.

Tesis doctoral, Fac. de CC. EE. y EE. Universidad Complutense, Madrid 1975.

CRAMÉR, Harald

Metodos matemáticos de estadistica.

Aguilar, Madrid 1970 (1ª ed. Djursholm (Suecia), 1950).

CRAMÉR, Harald

Elementos de la teoría de probabilidades.

Aguilar, Madrid 1977. (1ª ed. Djursholm, 1956).

DALKEY, N.

"An experimental study of group opinion".

Futures, 1969, vol. 1, nº 3, pp: 408-426.

DANTZIG, David Van

- "Review of Carnap's logical foundations of probability".

  Synthese, 1950-51, vol. 8, pp: 459-470.

- "Statistical priesthood: Savage on personal probabilities"

  Statistica Neerlandica, 1957, vol. 11, nº 1, pp: 1-16.

DAVID, Florence N.

Games, Gods and Gambling

Charles Griffin, London 1962.

DAVIDSON, D. y SUPPES, P.

"A finitistic axiomatization of subjective probability and utility".

Econometrica, 1956, vol. 24, pp: 264-275.

DAVIDSON, D. , SUPPES, P. y SIEGEL, S.

Decision making: an experimental approach.

Stanford University Press, 1957.

DEBREU, Gerard

- "Representation of a preference ordering by a numerical function".
  en Decision Proceses por Thral, R. M. Coombs, C. H. y Davis, R. L. (eds.), Wiley, New York 1957, pp: 159-166.

- "Stochastic choice and cardinal utility".
  Econometrica, 1958, vol. 26, nº 3, pp: 440-444.

- Review of R. D. LUCE.
  "Individual choice behavior: a theorical analysis".
  American Economic Review, 1960, vol. 50, pp: 186-188.

DeGROOT, M. H.

- Optimal Statistical Decisions
  Mc Graw Hill, New York 1970.

- "Reaching a consensus"
  Journal of the American Statistical Association, 1974, vol. 69, pp: 118-121.

- "Improving predictive distributions"
  Trabajos de estadística e investigación operativa, Instituto de investigación operativa y estadística, C.S.I.C., 1980, vol. 31, pp: 385-395.

DELGADO MANRIQUE, Carlos

La toma de decisión en las organizaciones. Aspectos metodológicos.

Tesis doctoral. Fac. de CC. EE. y EE., Universidad Complutense, Madrid 1982.

DIACONIS, Persi y **ZABEL**, Sandy L.

"Updating subjective probability"

Journal of the American Statistical Association, 1982, vol. 77, nº 380, pp: 822-830.

DICKEY, J. M.

"Beliefs about beliefs, a theory of stochastic of subjective probabilities".

Trabajos de est. e inv. op.; Inst. de inv. op. y est., C.S.I.C. 1980, vol. 31, pp: 471-487.

DOLBEAR, F. T. Jr.

"Individual choice under uncertainty -an experimental studie".

Yale Economic Essays, 1963, nº 3, pp: 419-470.

DREZE, Jacques H.

"Fondements logiques de la probabilité subjective et de l'utilité".

La Decision, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris 1961, pp: 73-87.

EDWARDS, Ward

- "Probability-preferences in gambling".
  American Journal of Psychology, 1953, nº 66, pp: 349-364.

- "Probability-preferences among bets with differing expected values".
  American Journal of Psychology, 1954, vol. 67, pp: 56-67.

- "The reability of probability preferences".
  American Journal of Psychology, 1954, vol. 67, pp: 68-95.

- "Subjective probabilities inferred from decisions".
  Psychological Review, 1962, vol. 69, pp: 109-135.

EDWARDS, W. , **LINDMAN**, Harold y **SAVAGE**, L. J.
"Bayesian statistical inference for psychological research"
Psychological Review, 1963, vol. 70, pp: 193-242.

EDWARDS, W. , **PHILLIPS**, L. D. , **HAYS**, W. L. y **GOODMAN**, B. C.
"Probability information processing systems: Design and evaluation".
IEEE Transactions on System Science and Cybernetics, 1968 pp: 248-265.

EDWARDS, Ward

Toma de decisiones

Fondo de cultura económica, México 1979 (1ª ed. Penguing Books, Harmondsworth, Inglaterra, 1967)

EISENBERG, Edmund y **GALE**, David

"Consensus of subjective probabilities: The Pari-mutuel method".

Annals of Mathematical Statistics, 1959, vol. 30, pp: 165-168.

ELLIS, Brian

"The logic of subjective probability".

British Journal for the Philosophy of Science, 1973, vol. 24, pp: 125-152.

ELLSBERG, Daniel

- "Clasic and current notions of measurable utility".
  The Economic Journal, 1954, vol. 64, nº 255, pp: 528-556.

- "Risk, ambiguity and the Savage axioms".
  The Quarterly Journal of Economics, 1961, vol. 75, pp:643-669.

ERICSON, William A.

"Subjective bayesian models in sampling finite populations"

Journal of the Royal Statistical Society, serie B, 1969, vol. 31, pp: 195-233.

FELLER, William

An introduction to probability, theory and its applications

Wiley, New York, vol. I 1950, vol. II 1966.

FERREIRA, Pedro E.

"On subjective probability and expected utilities".

The Annals of Mathematical Statistics, 1972, vol. 43, nº 3, pp: 928-933.

FINE, Terrence L.

Theories of probability

Academic Press, New York, 1973.

FINETTI, Bruno DE

- "Sul significato soggetivo della probabilitá".
  Fundamenta Mathematicae, 1931, vol. 17, pp: 298-329.

- "La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives"
  Annales de l'Institut Henri Poincaré, 1937, vol. 7, pp: 1-68. (Traducido en: Kyburg and Smokler 1964, pp: 93-158).

- "Le vrai et le probable"
  Dialectica, 1949, vol. 3, pp: 78-93.

- Sull impostazione assiomatica del calcolo della probabilité".
  Annali Univ. Trieste, 1949, vol. 19, setion 2.

FINETTI, Bruno DE

- "Recent suggestions for the reconciliations of theories of probability".
  Proceeding of the second Berkeley Symposium on Mathematical Statististics and Probability. 1950, ed. Jerzy Neyman, University of California Press, Berkeley, 1951.

- "Sulla preferibilita"
  Giornale degli Economist e Annali di Economia, 1952, vol. 11, pp: 685-709.

- "La notion de distribution d'opinion comme base d'un essai d'interpretation de la statistique".
  Publications de l'Institute de Statistique de l'Université de Paris, 1952, vol. 1, nº 2, pp: 1-19.

- "Media di decisione e media di opinioni"
  Bulletin de l'Institut International de Statistique, 28 th. session, nº 43, pp: 114-157.

- "The bayesian approach to the rejection of outliers"
  Proceedings of the fourth (1960) Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, ed. Jerzy Neyman, University of California Press, Berkeley 1961, vol. 1, pp: 199-210.

FINETTI; B. DE y SAVAGE, L. J.

"Sul modo di scegliere le probabilitá iniziali"
Sui fondamenti della statistica, Biblioteca del Metron, series C, 1962, vol. 1, pp: 81-154.

FINETTI, B. DE

- "Method for discriminating levels of partial knowledge concerning a test item"
  The British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 1965, vol. 18.

- "Probability: Interpretations"
  en International Encyclopedia of the Social Sciences, Macmillan, New York, 1968, pp: 496-505.

- <u>Probability, induction and statistics</u>
  Wiley, New York 1972

- <u>Theory of probability</u> (2 volumenes)
  Wiley, New York 1979 (1ª ed. Giulio Einaudi, Torino 1970)

FISHBURN, Peter C.

- "Preference-based definitions of subjective probability"
  Annals of Mathematical Statistics, 1967, vol. 38, pp: 1605-1617.

FISHBURN, Peter C.

- "Utility theory"
  Management Science, 1968, vol. 13, pp: 335-378.

- "A general theory of subjective probabilities and expected utilities".
  Annals of Mathematical Statistics, 1969, vol. 40, pp: 1419-1429.

- Utility theory for decision making
  Wiley, New York 1970.

- "Subjective expected utility with mixture sets and Boolean algebras".
  The Annals of Mathematical Statistics, 1972, vol. 43, nº 3, pp: 917-927.

FRÉCHET, Maurice

"Sur l'importance en économétrie de la distinction entre les probabilités rationelles et irrationelles".
Econometrica, 1955, vol. 23, pp: 303-306.

FRENCH, Simon

"Updating of belief in the light of someone else's opinion"
Journal of the Royal Statistical Society, 1980, vol. 143, parte 1, pp: 43-48.

FRENCH, Simon

"On the axiomatization of subjective probabilities"

Theory and Decision, 1982, vol. 14, nº 1, pp: 19-33.

FRIEDMAN, Milton y **SAVAGE**, L. J.

- "The utility analysis of choice involving risk"
  The Journal of Political Economy, 1948, vol. 56, pp: 279-304.

- "The expected-utility hypotesis and the measurability of utility".
  The Journal of Political Economy, 1952, vol. 60, pp: 463-474.

GALANTER, Eugene

"The direct measurement of utility and subjective probability".

American Journal of Psychology, 1962, vol. 75, pp: 208-220.

GALLI, W.

"Uncertainty as a philosophical problem "

en Uncertainty and business decisions, por Meredith, Carter y otros (eds.), Liverpool University Press, 1957.

GARCIA AGUADO, Josefina

Analisis borroso y teoría de la decisión

Tesis doctoral, Fac. de CC. EE. y EE., Univ. Complutense, Madrid, 1984.

GILLIES, Donald A.

"The subjective theory of probability"
British Journal for the philosophy of science, 1972, vol.23 pp. 138-156.

GIRON, F. J.

- "Una caracterización conjunta de la probabilidad subjetiva y de la utilidad".
Trabajos de estadística e investigación operativa. Inst. de Inv. Op. y Est., C.S.I.C., 1975, vol. 26, pp: 229-247.

- "Caracterización axiomática de la regla de Bayes y la probabilidad subjetiva".
Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 1977, vol. 71, nº 1, pp: 19-101.

GIRON, F. J. y RIOS, S.

"Quasi-Bayesian behavior: a more realistic approach to decision making".
Trabajos de Est. e Inv. Op., Inst. de Inv. Op. y Est., C.S.I.C., vol. 31, 1980, pp: 17-66.

GOOD, Irving John

<u>Probability and the veighing of evidence</u>

Charles Griffin Co., London, y Hafner Publishing Co., New York, 1950.

GOOD, Irving John

- "Rational decisions"
  Journal of the Royal Statistical Society, serie B, 1952, vol. 14, nº 1, pp: 107-114.

- "Kinds of probability"
  Science, 1959, vol. 129, pp: 443-447.

- "How rational should a manager be?"
  Management Science, 1962, vol. 8, nº 4, pp: 383-393.

- "Subjective probability as the measure of a non-measurable set".
  en Logic, methodology and philosophy of science. Nagel, Suppes and Tarski eds. , Stanford University Pres, Stanford (California), 1962, pp: 319-329.

- The estimation of probabilities: an essay on modern bayesian methods.
  Massachusetts Institute of Technology Press. Cambridge, 1965.

- "Alleged objectivity; a threat to the human spirit?"
  International Statistical Review, 1978, vol. 46, pp: 65-66.

GOTTINGER, Hans-Werner

"Konstruktion subjektiver wahrscheinlichkeiten"

Math. operationsforsch u. statist, 1974, vol. 5, heft 6, pp: 509-539.

HAAG, Jules

"Sur un probléme général de probabilités et ses diverses applications".

Proceedings of the International Congress of Mathematicians Toronto 1924, University of Toronto Press, Toronto 1928, pp: 659-674.

KACKING, Ian

"Slightly more realistic personal probability"

Philosophy of Science, 1967, vol. 34, pp: 311-325.

HADLEY, G.

<u>Probabilidad y estadistica: una introducción a la teoría de la decisión</u>.

Fondo de Cultura Económica, México 1979 (1ª ed. Holden-Day, Inc. San Francisco, California, 1967).

HAKANSSON, Nils H.

"Friedman-Savage utility functions consistent with risk aversión"

The Quarterly Journal of Economics. 1970, vol. 84, pp: 472-487.

HALMOS, Paul R.

"The foundations of probability"

American Mathematical Monthly, 1944, vol. 51, pp: 493-510.

HAMPTON, J. M. **MOORE**, P. G. y **THOMAS**, H.

"Subjective probability and its measurement"

Journal of the Royal Statistical Society, 1973, vol. 136. part. 1, pp: 21-42.

HAYS, William L.

Statistics

Holt, Rinehart and Winston, Inc. , Great Britain 1963

HEMPEL, C. G. and **OPENHEIM**, P.

"A definition of degreee of confirmation"

Philosophy of Science, 1945, vol. 12, nº 2, pp: 98-115.

HERSTEIN, I. N. and **MILNOR**, J.

"An axiomatic approach to measurable utility"

Econometrica, 1953, vol. 21, nº 2, pp: 291-297.

HOGARTH, Robin M.

"Cognitive processes and the assessment of subjective probability distribution"

Journal of the American Statistical Association, 1975, vol. 70, nº 350, pp: 271-294.

IRWIN, F. W.

- "Stated expectations as functions of probability and desirability of outcomes"
  J. Personality, 1953, vol. 21, pp: 329-335.

- "An analysis of the concepts of discrimination and preference".
  American Journal of Psychology, 1958, vol. 71, pp: 152-163.

JEFFREY, Richard C.

<u>The logic of decision</u>
Mc Graw-Hill Book Co., New York 1965.

JEFFREYS, Harold

- <u>Theory of probability</u>
  Clarendon Press, Oxford 1948.

- "The present position of the theory of probability"
  British Journal for the Philosophy of Sciences, 1955, vol. 5, pp: 275-289.

JUMARIE, Guy

"Sur une nouvelle méthode d'introduction des facteurs de subjectivité dans les problémes d'estimation statistique"

Annales de l'Institut Henri Poincaré, section B, 1980, vol. 16, nº 4, pp: 349-369.

KEMENY, John

"Fair bets and inductive probabilities"

Journal of simbolic logic, 1955, vol. 20, pp: 263-273.

KENDALL, Maurice G.

"On the reconciliation of the theories of probability"

Biometrika 1949, vol. 36, pp: 101-116.

KENDALL, Maurice G. y **PEARSON**, E. S.

Studies in the history of statistics and probability. Volume I

Charles Griffin, London 1970.

KENDALL, M. G. y **PLACKETT**, R. L.

Studies in the history of statistics and probability. Volume II

Charles Griffin, London 1977.

KEYNES, John Maynard

A Treatise on Probability

Macmillan, London and New York 1921

KNEALE, William

Probability and Induction

Clarendon Press, Oxford 1949.

KOLMOGOROV, Andrei N.

Foundations of the theory of probability

Chelsea Publishing Co., New York 1950 (1ª ed. Springer, Berlin, 1933).

KOOPMAN, Bernard Osgood

- "The bases of probability"
  Bulletin of the American Mathematical Society, 1940, (a), vol. 46, pp: 763-774.

- "The axioms and algebra of intuitive probability"
  Annals of Mathematics, 1940 (b), vol. 41, nº 2, pp: 269-292.

- "Intuitive probabilities and sequences"
  Annals of Mathematics, 1941, vol. 42, nº 1, pp: 169-187.

KRAFT, Charles H. , **PRATT**, John W. y **SEIDENBERG**, A.

"Intuirive probability on finite sets"

Annals of Mathematical Statistics, 1959, vol. 30, pp: 408-419.

KRELLE, Wilhelm

"A theory on rational behavior under uncertainty"

Metroeconomica, 1959, vol. 11, nº abril-agosto, pp: 51-63.

KYBURG, Henry E.

Probability and the logic of rational belief

Wesleyan University Press, Middletwon, Connecticut, 1961

KYBURG, H. E. y **NAGEL**, Ernest (eds.)

Induction: some current issues

Wesleyan University Press, Middletown, 1963.

KYBURG, H. E. y **SMOKLER**, Howard E.

Studies in subjective probability

Krieger, New York, 1980 (1ª ed. Wiley, New York 1964).

KYBURG, H. E.

"Recent work in inductive logic"

American Philosophical Quarterly, 1964, vol. 1, pp: 249-287.

LAPLACE, Pierre Simon

- Theorie analytique des probabilites

  M^me^ - V^e^ Courcier (impresor), Paris 1812

  Reimpresión del original por: Culture et civilisation, Bruxelles, 1967.

- Essay philosophique sur les probabilités

  Wiley, New York 1917 (1ª ed. Paris 1814)

LAVALLE, Irving H.

An introduction to probability, decision and inference.

Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York 1970.

LEHMANN, R. Sheerman

"On confirmation and rational betting".

Journal of simbolic logic, 1955, vol. 20, pp: 251-262.

LINDLEY, Dennis V.

- "Statistical Inference"

  Journal of the Royal Statistical Society, series B, 1953, vol. 15, pp: 30-76.

- "Fiducial distributions and Bayes theorem"

  Journal of the Royal Statistical Society, serie B, 1958, vol. 20, pp: 102-107.

LINDLEY, D. V. , **TVERSKY**, A. y **BROWN**, R. V.

"On the reconciliation of probability assessments"

Journal of the Royal Statistical Society, 1979, vol. 142 parte 2, pp: 146-180.

LINDLEY, D. V.

- Introduction to probability and statistics from a bayesian view point (2 partes)

  Cambridge University Press, Cambridge 1980 (1ª ed. 1965).

LINDLEY, D. V.

- "Scoring rules and the inevitability of probability" International Statistical Review, 1982, vol. 50, pp: 1-26.

- "The improvement of probability judgements" Journal of the Royal Statistical Society, serie A, 1982 vol. 145, pp: 117-126.

LOEVE, Michel

Teoria de la probabilidad
Tecnos, Madrid 1976 (1ª ed. Litton Educational Publishing, Inc., 1963).

LOPEZ CACHERO, Manuel

- El proceso de la decisión económica
Tesis doctoral, Fac. de CC. EE. y EE., Universidad Complutense, Madrid 1971.

- "Elección y decisión"
Anales de Economía, 3ª época, nº 10, abril-junio, 1971, pp: 61-96.

- Fundamentos y métodos de estadistica
Pirámide, Madrid 1977.

LOPEZ CACHERO, Manuel

- "Teoría de la utilidad"
  Revista de economía política, 1979, nº 83, sept-dic., pp: 131-145.

- "El problema de la regulación y la adopción de decisiones: El papel de la probabilidad y de la información"
  Separata de Anales del C.U.N.E.F., Madrid 1980-81, pp: 196-210.

- Teoría de la decisión
  I.C.E. , Madrid 1983.

LUCE, R. Duncan y **KRANTZ**, D. H.
"Conditional expected utility"
Econometrica, 1971, vol. 39, pp: 253-271.

LUCE, R. D. y **RAIFFA**, Howart
Games and decisions
Wiley, New York 1957.

LUCE, R. D. y **SUPPES**, Patrick
"Preference, utility and subjective probability"
en Handbook of Mathematical Psychology (3 vols.), vol. 3, Wiley, New York 1965, pp: 249-410.

MANSKI, Charles

"Learning and decision making when subjective probabilities have subjective domains"

The Annals of Statistics, 1981, vol. 9, nº 1, pp: 59-65.

MARSHAK, Jacob

"Rational behavior, uncertain prospect and measurable utility".

Econometrica, 1950, vol. 1, nº 2, pp: 111-141.

MATTESSICH, Richard

Instrumental reasoning and system methodology

Reidel Publishing Company, Dordrecht (Holland), Boston (USA), 1978.

MAY, Kenneth

"Intransitivity, utility and the aggregation of preference patterns"

Econometrica, 1954, vol. 22, nº 1, pp: 1-13.

MAY, S. J.

"An application of Neudstadt's abstract maximun principle to probability kinematics"

Journal of optimization theory and applications, 1979, vol. 27, nº 2, pp: 249-270.

MAYERSON, Allen L.

"A bayesian view of credibility"

Proceedings of the casualty actuarial society, 1964, vol. 51, pp: 85-104.

MEREDITH, G.

<u>Uncertainty and business decisions</u>

Liverpool University Press, 1957.

MISES, Richard **VON**

- "Théorie des probabilities. Fondements et applications"
  Annales de l'Institute Henri Poincaré, 1932, vol. 3, pp: 137-190.

- <u>Probability, statistics and truth</u>
  William Hodge and Co. , London 1939.

- "On the foundations of probability and statistics"
  Annals of Mathematical Statistics, 1941, vol. 12, pp: 191-217.

- "On the correct use of Bayes's formula"
  Annals of Mathematical Statistics, 1942, vol. 13, pp: 156-165.

MOLINA; Edward C.

"Bayes theorem: An expository presentation"

Annals of Mathematical Statistics, 1931, vol. 2, pp: 23-27.

MOOD, Alexander McFarlane y **GRAYBILL**, Franklin A.
Introducción a la teoría de la estadística.
Aguilar, Madrid 1978 (1ª ed. McGraw Hill, New York 1952)

MOORE, P. G.
"The mythical threat of Bayesianism"
International Statistical Review, 1978, vol. 46, pp: 67-73.

MUNROE, M. E.
Theory of probability
McGraw Hill Book Co. , New York 1951.

NAGEL, Ernest
Principles of the theory of probability
International Encyclopedie of Unified Science, vol. I nº 6, University of Chicago Press, Chicago 1939.

NAGEL, Ernest, **SUPPES**, Patrick and **TARSKI**, Alfred (eds.)
Logic, methodology and philosophy of science
Stanford University Press, Stanford 1962.

NARENS, Louis
"Minimal conditions for additive conjoint measurement

and qualitative probability"
Journal of Mathematical Psychology, 1974, vol. 11, pp: 404-430.

NEUMANN, John von y **MORGENSTERN**, Oskar
Theory of games and economic behavior
Princeton University Press, Princeton 1947.

NEWMAN, P. y **READ**, R.
"Representation problems for preference orderings"
Journal of Economic Behavior, 1961, vol. I, pp: 149-169.

NIETO DE ALBA, Ubaldo
Introducción a la estadística (3 vols.)
Aguilar, Madrid 1975

ORE, Oystein
"Pascal and the invention of probability theory"
American Mathematical Monthly, 1960, nº 67, pp: 409-419.

PARETO, Vilfredo
Manuale di economia politica con una introduzione ulla scienza sociale.
Societa Editrice Libraria, Milan, Italy, 1906.

PFANZAGL, Johann
Theory of measurement

Wiley, New York 1968.

POPPER, Karl R.

La lógica de la investigación científica

Tecnos, Madrid 1977 (1ª ed. Hutchinson, Londres 1962)

PRATT, John W.

"Risk aversion in the small and in the large".

Econometrica, 1964, vol. 32, pp: 122-136.

PRATT, J. W. , **RAIFFA**, Horward y **SCHLAIFER**, Robert

"The foundations of decision under uncertainty: An elementary exposition"

Journal of the American Statistical Association, Junio 1964, pp: 353-375.

PRESS, S. J.

"Bayesian inference in group judgement formulation and decision making using qualitative controlled feedback".

Trabajos de estadística e investigación operativa, Instituto de Investigación Operativa y Estadística, C.S.I.C. 1980, vol. 31, pp: 397-429.

PRESTON, M. G. y **BARATTA**, P.

"An experimental study of the auction-value of an uncertain outcome"

American Journal of Psychology, 1948, vol. 61, pp: 183-193.

RAIFFA, Howard

"Risk, ambiguity and the Savage axioma: comment"

Quarterly Journal of Economics, 1961, vol. 75, pp: 690-694.

RAIFFA, H. y **SCHLAIFER**, Robert

Applied statistical decision theory

Harvard University Press, Cambridge, 1961.

RAMSEY, Frank P.

"Truth and probability"

en The Foundations of Mathematics and other Logical Essays

Kegan Paul, London, y Harcourt, Brace and Co. New York, 1931, pp: 156-198.

REINCHENBACH, Hans

The Theory of probability

University of California Press, Berkeley y Los Angeles 1949.

RENYI, Alfred

Foundations of probability

Holden-Day, San Francisco, 1970.

RICHTER, Marcel K.

"Revealed preference theory"

Econometrica, 1966, vol. 34, nº 3, pp: 635-645.

RIOS GARCIA, Sixto

- Métodos Estadísticos

  Ediciones del Castillo, Madrid 1967

- Análisis de decisiones

  ICE, Madrid 1976.

RIOS INSUA, Sixto

"Decisiones en incertidumbre con multiatributos"

Trabajos de est. e inv. op., C.S.I.C., 1982, vol. 33, nº 2, pp: 47-63.

ROBBINS, Herbert

"The empirical Bayes approach to statistical decision problems".

Annals of Mathematical Statistics, 1964, vol. 35, pp: 1-20.

ROBBERTS, Harry V.

- "Risk, amgiguity and the Savage axioms: comment"

  The Quarterly Journal of Economics, 1963, vol. 77, pp: 327-342.

- "Probabilistic prediction"

  Journal Statistical Association, 1965, vol. 60, pp: 50-62.

SAATY, T. L.

An eigenvalue allocation model in contingency planning.

University of Pennsylvania, 1972.

SAATY, T. L.

- "Measuring the fuzziness of sets"
  Journal of Cybernetics, 1974, vol. 4, pp: 53-61.

- "A scaling method for priorities in hierarchical structures".
  Journal of Mathematical Psychology, 1977, vol. 15, pp: 234-281.

- "Exploring the interface between hierarchies, multiple objects and fuzzy sets"
  Fuzzy sets and systems, 1978, vol. 1, pp: 57-68.

SAATY, T. L. y **KHOUJA**, M.

"A measure of world influence"
Journal of Peace Science, 1976, vol. 2, pp: 31-48.

SAMUELSON, Paul A.

"Probability, utility and independence axiom "
Econometrica, 1952, vol. 20, pp: 670-678.

SAVAGE, I. Richard

<u>Statistics: uncertainty and behavior</u>
Houghton Mifflin Company, Boston 1968.

SAVAGE, Leonard J.

- "Review of I. J. Good's probability and the weighing of evidence".
  Journal of the American Statistical Association, 1951 vol. 46, pp: 383-384.

- "The theory statistical decision".
  Journal of American Statistical Ass., 1951, vol. 46, pp: 55-67.

- "Review of the Rudolf Carnap's logical foundations of probability".
  Econometrica, 1952, vol. 20, pp: 668-690.

- <u>The foundations of statistics</u>
  Wiley, New York, 1954.

- "Recent tendencies in the foundations of statistics".
  Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Edinburg 1958), Cambridge University Press, Cambridge 1961, pp: 540-544.

- "The foundations of statistics reconsidered"
  Proceedings of fourth (1960) Berkeley Symposium on Mathematical, Statistics and Probability, ed: Jerzy Neyman, University of California Pres, Berkeley, 1961, vol. I, pp: 575-586.

SAVAGE, Leonard J.

- "Bayesian statistics"
  en Recent Developments in Decision and Information Processes eds. Robert E. Machol y Paul Gray, Macmillan Co., New York 1962, pp: 161-194.

- "Implications of personal probability for induction"
  Journal of Philosophy, 1967, vol. 64, pp: 593-607.

- "Difficulties in the theory of personal probability"
  Philosophy of Science, 1967, vol. 34, pp: 305-310.

- "Reading suggestions for the foundations of statistics"
  The American Statistician, 1970, vol. 24, nº 4, pp: 23-27.

- "Elicitation of personal probabilities and expectations"
  Journal of the American Statistical Association, 1971, vol. 66, pp: 783-801.

SCHLAIFER, Robert

- Probability and statistics for business decisions
  MacGraw-Hill Book Co., New York 1959.

- Analysis of decision under uncertainty
  MacGraw-Hill, New York 1969.

SCOTT, D.

"Measurement structures and linear inequilities"

Journal Mathematical Psychology, 1964, vol. 1, pp: 233-247.

SCOTT, D. y **SUPPES**, P.

"Foundations aspects of theories of measurement"

Journal of simbolic logic, 1958, vol. 23, pp: 113-128.

SEARLE, S. R.

"Probability, the difficulties of definition"

Journal of the Institute of Actuaries Student's Society, 1951, vol. 10, pp: 204-212.

SEBENIUS, James K. y **GENAKOPLOS**, John

"Don't bet on it: contingent agreements with asymetric information".

Journal of the American Statistical Association, 1983, vol. 78, nº 382, pp: 424-426.

SHACKLE, G.

"A non-additive measure of uncertainty"

The Review of Economic Studies, 1950, vol. 17, nº 1, pp: 70-74.

SHIMONY, Abner

"Coherence and the axioms of confirmation"

Journal of simbolic logic, 1955, vol. 20, pp: 1-28.

SIMON, Herbert A.

- "A behavioral model of rational choice"
  Quarterly Journal of Economics, 1955, vol. 69, pp: 99-118.

- "Rational choice and the structure of the environment"
  Psychological Review, 1956, vol. 63, pp: 129-138.

SMITH, Cedric A. B.

- "Consistency in statistical inference and decision".
  Journal of the Royal Statistical Society, serie B, 1961, vol. 23, pp: 1-37.

- "Personal probability and statistical analysis"
  Journal of the Royal Statisti. Soc., serie A, 1965, vol. 128, pp: 469-499.

SMITH, David Eugene

History of Mathematics (2 vols.)
Dover, New York 1958 (1ª ed. 1923)

STAEL VON HOLSTEIN, Carl Axel S.

Assessment and evaluation of sujective probability distributions.
The Economic Research Institute at the Stockholm School

of Economics, Stockholm, 1970.

STIGLER, George J.

"The development of utility theory" (I y II)

Journal of Political Economy. (I) 1950, vol. 58, nº 4, pp: 307-327. (II) 1950, vol. 58, pp: 373-396.

STONE, M. H.

- "Theory of representation for Boolean algebras"
  Transactions of the American Mathematical Society, 1936, vol. 40, pp: 37-111.

- "The opinion pool"
  Annals of Mathematical Statistics, 1961, vol. 32, pp: 1339-1342.

STRUIK, Dirk J.

<u>A concise History of Mathematics</u>

Dover, New York 1967 (1ª ed. 1948).

SUPPES, Patrick

"The role of subjective probability and utility in decision making".

Proceedings of the third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (1954-1955). University of California Press, 1956, vol. 5, pp: 61-73.

SUPPES, P. and **WINET**, Muriel

"An axiomatization of utility based on the notion of utility differences"

Management Science, 1955, vol. 1, pp: 259-270.

SUPPES, Patrick

- "Some open problems in the foundations of subjective probability"

  en Information and decision processes, ed.: Robert Machol McGraw-Hill, New York 1960, pp: 162-169.

- "The measurement of belief"

  Journal of the Royal Statistical Society, serie B, 1974 vol. 36, nº 2, pp: 160-191.

SWALM, R. O.

"Utility theory-insights into risk taking"

Harvard Business Review, 1966, november-december, pp: 123-136.

TIPPETT, C. H. H.

Statistics

Oxford University Press, London 1947.

TODA, Masanao

"Measurement of intuitive probability by a method of game"

Japanese Journal of Psychology, 1961, vol. 22, pp: 29-40.

TODHUNTER, Isaac

A History of the Mathematical Theory of Probability

Chelsea Publishing Co. , New York 1965 (1ª ed. Cambridge 1865).

TATCHER, A. R.

"Relationships between bayesian and confidence limits for predictions"

Journal of the Royal Statistical Society, serie B, 1964, vol. 26, pp: 176-210.

TVERSKY, Amos

"Choice by elimination"

Journal of Mathematical Psychology, 1972, vol. 9, pp: 341-367.

UZAWA, H.

"Preference in rational choice in the theory of consumption".

en Mathematical methods in the social sciences, K. J. Arrow, S. Karlin, y P. Suppes (eds.) , Stanforf University Press, 1960, pp: 129-148.

VEGAS PEREZ, Angel

Estadistica, aplicaciones econométricas y actuariales

Pirámide, Madrid 1981.

VEGAS PEREZ, Angel

"Estimación bayesiana de la probabilidad de muerte"

Trabajos de estadistica, vol. XIX, cuaderno I y II, pp: 7-26. Iberica, Madrid 1968.

VENN, John

The logic of chance

Chelsea Publishing Company, New york 1962 (1ª ed. 1866)

VICKERS, John M.

"Some remarks on coherence and subjective probability"

Philosophy of Science, 1965, vol. 32, pp: 32-38.

VILLEGAS, C.

"On qualitative probability σ-algebras"

Annals of Mathematical Statistics, 1964, vol . 35, pp: 1787-1796.

WADE, V.

Three methods for eliciting subjective probabilities

Masters thesis, Ions College, New Rochelle, New York, 1977.

WADE, V. y **YAGER**, R. R.

"Comparison of methods for eliciting finite subjective probabilities"

Proceedings of the 1977 AIDS National Conference, Chicago 1977, pp: 414-416.

WAKER, Peter

"Agreeing probability measures for comparative probability structures"

The Annals of Statistics, 1981, vol. 9, nº 3, pp: 658-662.

WELDOM, J. C.

"A note on measures of utility"

Canadian Journal of Economics and Political Science, 1950 vol. 16, pp: 227-233.

WHITE, D. J.

Teoria de la decisión

Alianza Universidad, Madrid 1972 (1ª ed. George Allen and Unwin, Londres 1969).

WILSON, R. B.

"The theory of sindicates"

Econometrica, 1968, vol. 36, nº 1, pp: 119-131.

WINKLER, Robert L.

"The assessment of prior distributions in bayesian analysis".

Journal of the American Statistical Association, 1967 a, vol. 62, pp: 776-800.

WINKLER, Robert L.

- "The quantification of judgment: some methodological suggestion".
  Journal of the American Statis. Assoc., 1967 b, vol. 62, nº 320, pp: 1105-1120.

- "The consensus of subjective probability distributions"
  Management Science, serie B, 1968, vol. 15, nº 2, pp: 61-75.

WINKLER, R. L. y **MURPHY**, A. H.

"Good probability assessors"
Journal of applied meteorology, 1968, vol. 7, pp: 751-758.

WOLD, H.

"Ordinal preferences or cardinal utility"
Econometrica, 1952, vol. 20, pp: 661-664.

WRIGHT, George Henrik von

- <u>A treatise on induction and probability</u>
  Harcourt Brace and Co., New York 1951.

- "Remarks on epistemology of subjective probability"
  en <u>Logic, methodology and philosophy of science</u>, Nagel, Suppes and Tarski (eds.), Stanford University Press, Stanford (California), 1962, pp: 330-339.

YAGER, R. R.

"Multiple objective decision making using fuzzy sets". International Journal of Man-Machine Studies, 1977, vol. 9, pp: 375-382.

YOKOYAMA, Tamotsu

"Continuity conditions of preference ordering" Osaka Economic Papers, 1956, vol. 4, nº 3, pp: 39-45.

ZEEUM, G. de , **VLEK**; C. A. J. and **WAGENAAR**, W. A.

"Subjective probability: Theory, experiments, applications" Acta Psychologica, vol. 34, nº 2/3. North Holland Publishing Co. Amsterdam 1970.

FE DE ERRATAS

Página	Línea	Donde dice	Debe decir
27	23	defecftos	defectos
63	20	coluciones	soluciones
89	22	verstatilidad	versatilidad
95	10	la página 76	las páginas 89 y 90
136	23	Rudol	Rudolf
182	17	e	E
183	8 y 9	P	p
192	3	1=1	i=1
201	7	proporciones	proposiciones
203	13	axiomética	axiomática
211	2	verdader	verdadero
218	6	preferenicas	preferencias
222	20	$\mathcal{R}^*$	R*
243	4 y 9	utilidad esperado	utilidad esperada
264	7 y 9	A* >	A *>
271	3	P	p
272	6	P	p
293	19	utiidades	utilidades
299	21	bojetivo	objetivo
410	21	parcial	débil
417	última	subrrayados	subrayados

$$\frac{P(S_k) \cdot P(X/S_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(S_i) \cdot P(X/S_i)} =$$